

# JuniorAkademie Adelsheim

## 18. SCIENCE ACADEMY BADEN-WÜRTTEMBERG 2021



**Astronomie**



**Informatik**



**Mathematik**



**Medizin**



**Philosophie**



**Physik**

Regierungspräsidium Karlsruhe Abteilung 7 – Schule und Bildung



**Dokumentation der  
JuniorAkademie Adelsheim 2021**

**18. Science Academy  
Baden-Württemberg**

**Veranstalter der JuniorAkademie Adelsheim 2021:**

Regierungspräsidium Karlsruhe  
Abteilung 7 –Schule und Bildung–  
Hebelstr. 2

76133 Karlsruhe

Tel.: (0721) 926 4245

Fax.: (0721) 933 40270

[www.scienceacademy.de](http://www.scienceacademy.de)

E-Mail: [joerg.richter@scienceacademy.de](mailto:joerg.richter@scienceacademy.de)

[monika.jakob@scienceacademy.de](mailto:monika.jakob@scienceacademy.de)

[rico.lippold@scienceacademy.de](mailto:rico.lippold@scienceacademy.de)

Die in dieser Dokumentation enthaltenen Texte wurden von der Kurs- und Akademieleitung sowie den Teilnehmerinnen und Teilnehmern der 18. JuniorAkademie Adelsheim 2021 erstellt. Anschließend wurde das Dokument mithilfe von L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X gesetzt.

Gesamtredaktion und Layout: Jörg Richter

Copyright © 2021 Jörg Richter, Dr. Monika Jakob

# Vorwort

Meine Damen und Herren, willkommen an Deck unserer Entdeckungsreise. Sind Sie bereit, die Segel zu hissen und in ein Abenteuer hinter dem Meereshorizont zu segeln? Die rund 70 Teilnehmerinnen und Teilnehmer zusammen mit den rund 30 Kursleiterinnen und Kursleitern wagten dieses Abenteuer. Von dem leichten Wind durch Corona ließen sie sich nicht aufhalten, am Eröffnungswochenende im Juni diese einzigartige Entdeckungsreise zu starten. Passend zum diesjährigen Motto der 18. Science Academy Baden-Württemberg „Entdeckungen“ standen alle bereit – mit einem Gepäck voller Erwartungen, Neugierde, aber auch Hoffnung, was hinter dem Horizont an Unbekanntem auf sie warten würde. Nach dem ersten gegenseitigen Kennenlernen und einem Einstieg in ihre jeweiligen Kursthemen konnten sie im Sommer richtig durchstarten.

Während der Mathematikkurs eine Rundreise durch die Mathematik antrat, machten sich die Philosophinnen und Philosophen Gedanken über den Sinn des Lebens und im Medizinkurs wurde die rote Essenz des Lebens erforscht, das Blut. Mit dem richtigen Verständnis von Datenaustausch wurden im Informatikkurs kleine Spiele entwickelt, der Astronomiekurs suchte nach fernen und nahen Signalen durch Radiowellen und die Physikerinnen und Physiker sorgten dafür, dass uns mithilfe der Sonne nie der Strom ausgeht. Wie Sie sehen, herrschte auf der Entdeckungsreise reges Teamwork.

Die Wochen im Sommer waren für alle besonders: Einen Teil der Zeit wurde online gearbeitet, die Kurse konnten aber auch als Highlight im Wechsel am Landesschulzentrum für Umwelterziehung in Adelsheim Station machen. Dort wurden dann unzählige Masken gehisst und Hände desinfiziert, zusätzlich wurden rund 300 Coronatests durchgeführt. Ein Gruppenbild mit allen an der Akademie beteiligten wie auch die Kursphotos konnten nur dank Photoshop und einer strengen Choreographie entstehen: Alle waren frisch und natürlich negativ getestet, man stellte sich auf, und dann hieß es „Maske ab – Photo – Maske wieder auf“. Belohnt wurden wir für den großen Aufwand mit einer sicheren Akademie. Nicht zuletzt spielte auch das Wetter mit, dank der sonnigen Tage konnte vieles im Freien stattfinden.

Und so lag der Fokus schnell auf der Kursarbeit und den KüAs, die Arbeit online wie offline wurde intensiviert. Vor allem während der Zeit in Adelsheim, aber auch online wurden die ersten Freundschaften geschlossen und Interessen ausgetauscht, und die Kurse fanden sich immer mehr als Team. Begleitet von Grillabenden, Wanderungen und kleinen Spaßaktionen ging die Kursarbeit gut voran und fand am Präsentationstag mit dem großen Abschlussabend ihren Höhepunkt.

Danach nahm das Entdeckungsschiff Kurs auf das Dokumentationswochenende. Dort konnten wir alle nochmal auf die schöne gemeinsame Zeit zurückblicken und die Dokumentation mit inhaltlichen Berichten aus den Kursen und Erinnerungen an die gemeinsame Zeit füllen, aber auch einen Blick in die Zukunft mit Optionen für weitere Entdeckungen werfen.

Bei der Akademie gab es viel zu entdecken: Da waren zunächst die Kursinhalte, Musik, Theater, Sport und die anderen kursübergreifenden Angebote. Veranstaltungen online, „in echt“ oder hybrid, Coronatests und Hygieneregeln. Aber auch die Fähigkeiten der Entdeckerinnen und Entdecker wie Teamwork, Präsentieren und Projektmanagement wurden bei der Akademie vertieft, und neue Freundschaften, Erkenntnisse und Erinnerungen sind entstanden. Getragen wurden diese Entdeckungen durch das große Interesse, das Engagement und die Begeisterung der jungen Menschen. All diese großen und kleinen Entdeckungen trugen zur Akademie als großes Ganzes

bei, und dies wurde durch ein Bild symbolisiert, entstanden aus unzähligen einzelnen Bildern, die uns die Teilnehmerinnen und Teilnehmer geschickt hatten, und die für sie persönlich wichtige Entdeckungen zeigen.



Ein Blick hinter den Horizont wurde gewagt, doch dahinter verbirgt sich noch so viel mehr: Vollgepackt mit neuen Eindrücken entlassen wir die Abenteuerlustigen in die Freiheit und freuen uns schon jetzt auf ein mögliches Wiedersehen. Wir wünschen Euch und Ihnen viel Spaß beim Durchstöbern des Logbuchs unserer gemeinsamen Entdeckungsreise und hoffen, dass Ihr, liebe Teilnehmerinnen und Teilnehmer, Euch noch lange an die einzigartige gemeinsame Zeit online und in Adelsheim erinnern werdet.

Eure/Ihre Akademieleitung

Ranran Ji (Assistenz)

Lorenz Löffler (Assistenz)

Dr. Monika Jakob

Jörg Richter





# **Inhaltsverzeichnis**

<b>VORWORT</b>	<b>3</b>
<b>KURS 1 – ASTRONOMIE</b>	<b>9</b>
<b>KURS 2 – INFORMATIK</b>	<b>31</b>
<b>KURS 3 – MATHEMATIK</b>	<b>47</b>
<b>KURS 4 – MEDIZIN</b>	<b>67</b>
<b>KURS 5 – PHILOSOPHIE</b>	<b>91</b>
<b>KURS 6 – PHYSIK</b>	<b>119</b>
<b>KÜAS – KURSÜBERGREIFENDE ANGEBOTE</b>	<b>143</b>
<b>DANKSAGUNG</b>	<b>159</b>
<b>BILDNACHWEIS</b>	<b>161</b>

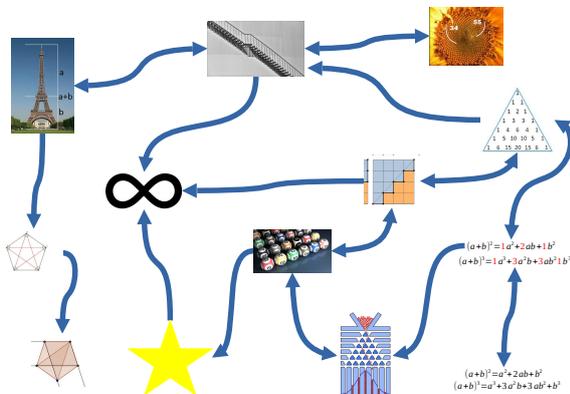


## Kurs 3 – Rundreise durch die Mathematik



Gemäß dem Motto „Entdeckungen“ begaben wir uns im Kurs auf eine Rundreise durch die Mathematik. Unerschrocken tauchten wir ein in die faszinierende Welt der Mathematik und beschäftigten uns mit außergewöhnlichen Zahlenfolgen, mit komplizierten Problemen der Kombinatorik, mit kniffligen Konstruktionen und mit unumstößlichen mathematischen Beweisen.

geisterung immer tiefer in die verschiedenen Themengebiete. Dabei stießen wir auf höchst unerwartete Zusammenhänge – wissen Sie beispielsweise, wie der Eiffelturm und ein Tannenzapfen miteinander in Verbindung stehen? Im Folgenden möchten wir Sie mitnehmen auf unsere Rundreise und Ihnen unsere Entdeckungen präsentieren.



Egal wie schwierig die Herausforderungen waren, kämpften wir uns mit ansteckender Be-

### Pascalsches Dreieck

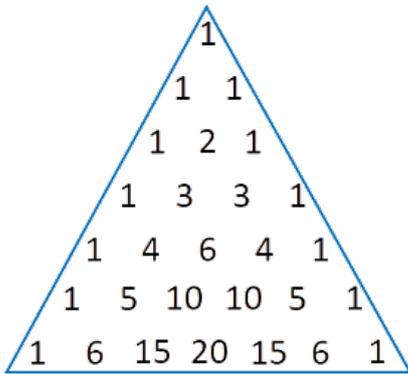
#### Aufbau

KATHARINA GRING

Das Pascalsche Dreieck ist ein sehr besonderes Dreieck und hat viele einzigartige Eigenschaften.

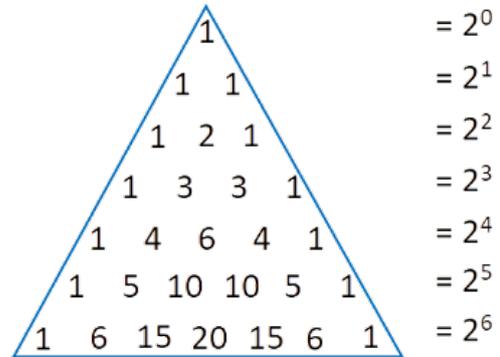
Es ist wie folgt aufgebaut: An der Spitze stehen drei Einsen, die in jeder folgenden Reihe jeweils am Rand fortgeführt werden. Die restlichen Zahlen bilden sich aus der Summe der beiden Zahlen über der Zahl. Beispielsweise ist die „2“

die Summe der beiden Einsen darüber und die „3“ entsteht aus der „2“ und der „1“.



sich die einzelnen Zeilen im Dreieck anzusehen. Dabei sieht man, dass die Summe der Zahlen in jeder Reihe

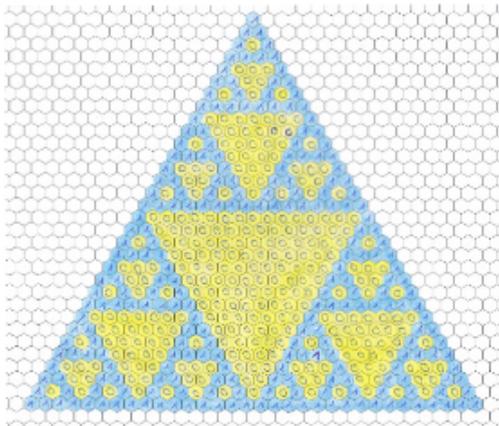
1, 2, 4, 8, ...



**Fraktal**

KATHARINA GRING

Eine der besonderen Eigenschaften des Pascalschen Dreiecks ist, dass sich ein bestimmtes Muster ergibt, wenn man die geraden Zahlen durch eine „0“ ersetzt und statt der ungeraden Zahlen eine „1“ verwendet. Auf dem Bild sind die geraden Zahlen in Gelb, die ungeraden Zahlen in Blau eingefärbt. Daraus ergibt sich ein sogenanntes Fraktal, was bedeutet, dass ein Dreieck mit weiteren Dreiecken darin entsteht.



ist. Anders ausgedrückt sind das die Zweierpotenzen, also

$$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \dots$$

Das liegt daran, dass beim Schreiben einer neuen Zeile jede Zahl der Zeile darüber genau zweimal dazu addiert wird: Einmal nach links und einmal nach rechts.

**Diagonalen**

MAJA EGE

Wenn man sich nun die Diagonalen des Pascalschen Dreiecks ansieht, erhält man ebenfalls interessante Zahlenfolgen. Um sich diese besser vorzustellen, kann man die einzelnen Zahlen als Punkte darstellen.

0. Dimension

1, 1, 1, 1, 1, ...



Am Rand des Dreiecks sehen wir nur Einsen. Auf eine 1 folgt immer eine weitere 1, sodass die Folge fortlaufend aus Einsen besteht. Wir haben also immer einen Punkt, was man auch als 0 Dimensionen bezeichnen kann.

1. Dimension

1, 2, 3, 4, 5, ...



**Zweierpotenzen**

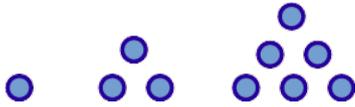
MAJA EGE

Eine weitere Auffälligkeit beim Pascalschen Dreieck ist, dass man viele interessante Zahlenfolgen darin entdecken kann – manche davon leichter, für andere muss man eine Weile suchen. Eher naheliegend ist es beispielsweise,

In der zweiten Diagonale wird linear gezählt, also immer plus 1. Es wird immer ein Punkt an die Reihe angefügt, wodurch eine eindimensionale Linie entsteht.

2. Dimension

1, 3, 6, 10, 15, ...



Die sogenannten „Dreieckszahlen“, die dritte Diagonale im Pascalschen Dreieck, bilden in der Punktvisualisierung Dreiecke, eine zweidimensionale Fläche. Hierbei wird nicht nur ein Punkt an die Reihe angefügt wie in der 1. Dimension, sondern es wird eine ganze Reihe nach unten „angebaut“. Dadurch ergibt sich die Zahlenfolge, bei der erst +1, dann +2, +3, +4 usw. gezählt wird.

3. Dimension

1, 4, 10, 20, 35, ...



Die „Pyramidenzahlen“ entstehen, indem statt einer Reihe eine ganze Ebene angefügt wird, unsere Dreiecke von vorhin. Dadurch ergibt sich eine dreidimensionale Pyramide.

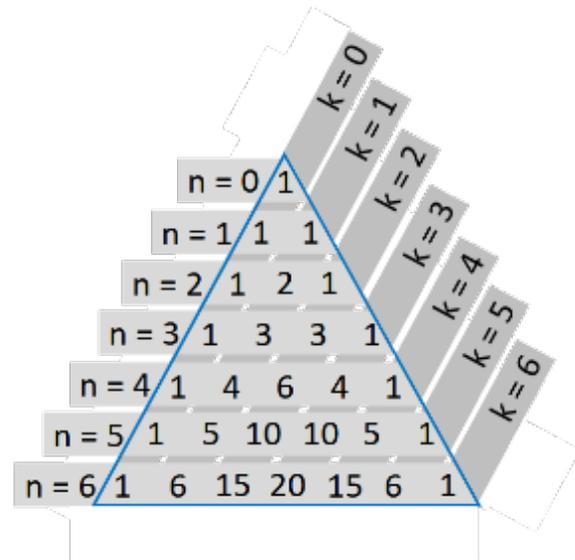
Diese Zahlenfolgen der Dimensionen lassen sich immer weiterführen, jedoch ist es für uns Menschen schwierig zu verstehen, wie eine 4. oder 5. Dimension aussehen könnte, da wir in einer dreidimensionalen Welt leben.

**Berechnung**

KATHARINA GRING

Ein Problem herrscht trotz allem in dem Dreieck: Um z. B. die dritte Zahl in der 50. Zeile herauszufinden, muss das komplette Dreieck davor berechnet werden und – falls man einen Fehler macht – muss nochmal neu angefangen werden zu rechnen. Dies ist sehr mühsam und kann viel Zeit in Anspruch nehmen. Glücklicherweise gibt es aber einen Weg, mit dem man einzelne Zahlen berechnen kann.

Man beginnt damit, eine Zahl auszuwählen, die man berechnen möchte. Die Zeilen bekommen die Variable  $n$  und die Spalten die Variable  $k$  zugewiesen. Man muss allerdings aufpassen, da die Zählung der Zeilen und Spalten jeweils bei 0 beginnt.



Möchte man nun die Zahl in der  $n$ -ten Zeile und  $k$ -ten Spalte ermitteln, verwendet man folgende Formel:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$$

Dabei handelt es sich um die Binomialkoeffizienten (Koeffizient: hier Vorfaktor vor einer Variablen bzw. einem Basiswert). Nimmt man die einfachste binomische Formel,

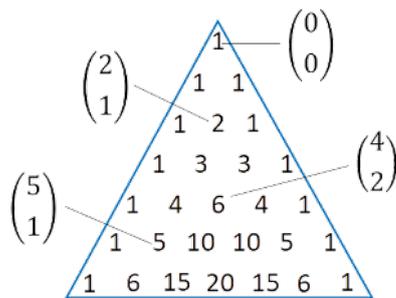
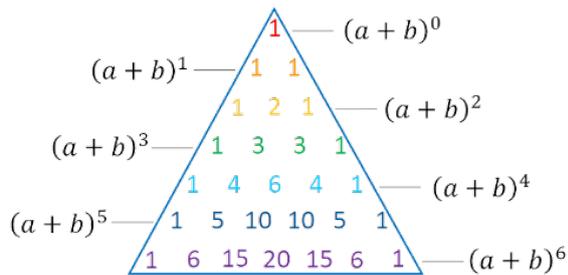
$$(a + b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot b^2,$$

so sieht man, dass die Vorfaktoren genau die Zahlen der zweiten Zeile sind.

Dies funktioniert mit jeder Zeile:

$$(a + b)^6 = 1 \cdot a^6 \cdot b^0 + 6 \cdot a^5 \cdot b^1 + 15 \cdot a^4 \cdot b^2 + 20 \cdot a^3 \cdot b^3 + 15 \cdot a^2 \cdot b^4 + 6 \cdot a^1 \cdot b^5 + 1 \cdot a^0 \cdot b^6$$

Somit hat man in einer viel schnelleren und einfacheren Variante das Pascalsche Dreieck berechnet.



## Kombinatorik

MORITZ S., MORITZ B.

Die Kombinatorik zählt die Anzahl der verschiedenen möglichen Versuchsausgänge von Zufallsexperimenten.

Zur Veranschaulichung wird oft eine Urne benutzt. In dieser Urne befinden sich  $n$  durchnummerierte Kugeln. Es wird  $k$ -mal gezogen. Entscheidend für die Anzahl der verschiedenen möglichen Versuchsausgänge ist hierbei, ob eine Kugel nach dem Ziehen zurückgelegt wird oder „ausscheidet“. Zudem wird unterschieden, ob die Reihenfolge, in der die Kugeln gezogen wurde, relevant ist (Variation) oder nicht (Kombination). Somit gibt es vier Fälle.

Bevor wir auf die Fälle eingehen: Im Folgenden wird die Rechenoperation Fakultät angewendet. Die Fakultät einer Zahl ist das Produkt aller Zahlen von 1 bis einschließlich dieser Zahl. Beispiel:

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

Die Tabelle zeigt für die vier Fälle die Terme zur Berechnung der Anzahl der möglichen Versuchsergebnisse.

Unterhalb der Tabelle werden die vier Fälle einzeln betrachtet und die jeweiligen Terme erklärt bzw. hergeleitet.

	mit Wiederholung	ohne Wiederholung
Variation (mit Beachtung der Reihenfolge)	1. Fall: $n^k$	2. Fall: $\frac{n!}{(n-k)!}$
Kombination (ohne Beachtung der Reihenfolge)	4. Fall: $\binom{n+k-1}{k}$	3. Fall: $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

- Zurücklegen und Merken der Reihenfolge sorgen für  $n$  Möglichkeiten bei jeder der  $k$  Ziehungen. Somit kommt es zu  $n^k$  verschiedenen möglichen Versuchsausgängen.
- Ohne Zurücklegen der Kugel gibt es beim ersten Zug  $n$  Möglichkeiten, beim zweiten  $n-1$ , ... bis  $n-k+1$ . Insgesamt kommt es zu:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Möglichkeiten.

- Beim dritten Fall haben wir das gleiche Grundprinzip. Da die Kugel nicht wieder zurückgelegt wird, kann sie nicht mehr gezogen werden. Aber dieses Mal achten wir nicht auf die Reihenfolge, in der die Kugeln gezogen werden. Bei insgesamt  $k$  gezogenen Kugeln gibt es  $k!$  Möglichkeiten diese in verschiedenen Reihenfolgen zu ziehen. Deswegen verringert sich die Anzahl der Möglichkeiten um den Faktor  $k!$ . Die Anzahl der Möglichkeiten beträgt somit:

$$\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Für diesen Term schreibt man auch:

$$\binom{n}{k}$$

Dies wird „n über k“ ausgesprochen.

- Im vierten Fall, also ohne Beachtung der Reihenfolge, aber mit Wiederholung, beträgt die Anzahl:

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Der Ausdruck

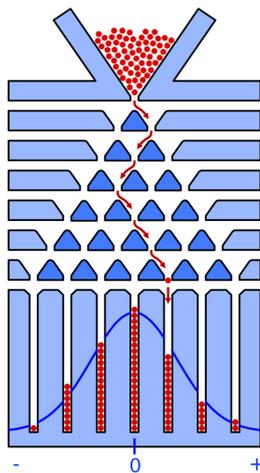
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

ist der oben schon erwähnte Binomialkoeffizient. Mit ihm können auch die Zahlen im Pascalschen Dreieck direkt berechnet werden.

### Galton-Brett

Die Abbildung zeigt ein Galton-Brett mit sieben Feldern. Anders als in der Abbildung nummerieren wir die Felder von links nach rechts mit 0 bis 6.

Lässt man nun eine Kugel durch das Brett fallen, wird die Kugel jeweils mit der Wahrscheinlichkeit  $p$  nach rechts und mit der Wahrscheinlichkeit  $q$  nach links abgelenkt. Dabei gilt  $q = 1 - p$ .



Galton-Brett<sup>1</sup>

### Ausrechnen von Wahrscheinlichkeiten beim Galton-Brett

Bei einem Galton-Brett mit  $n + 1$  Feldern lässt sich die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kugel im  $k$ -ten Feld landet, mit Hilfe folgender Formel berechnen:

$$P_k = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

Es gibt  $\binom{n}{k}$  verschiedene Wege, um im  $k$ -ten Feld zu landen. Man kann sich das folgendermaßen vorstellen: Um im Feld mit der Nummer

<sup>1</sup>Abbildung: Wikimedia (Wikimedia-User Chrischi, als gemeinfrei gekennzeichnet)

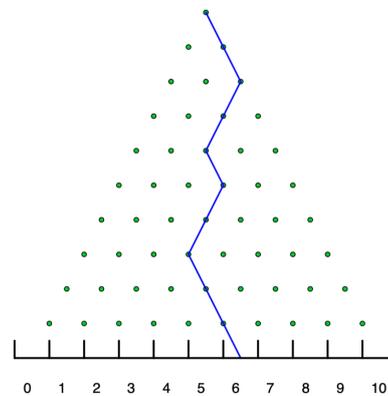
$k$  zu landen, muss die Kugel insgesamt bei  $k$  Abzweigungen nach rechts und bei den anderen nach links fallen. Um nun alle Fälle abzudecken, sucht man sich  $k$  Zeilen aus, in denen die Kugel nach rechts fallen soll. Bei allen anderen Fällen fällt die Kugel nach links. Das entspricht dem Ziehen von  $k$  aus  $n$  Kugeln. Die Formel für die Anzahl aller Möglichkeiten, im Feld mit der Nummer  $k$  zu landen, ist also:

$$\binom{n}{k}$$

Um nun von der Anzahl an Möglichkeiten auf die Wahrscheinlichkeit im  $k$ -ten Feld zu kommen, muss man nur noch mit der Wahrscheinlichkeit für jede Möglichkeit multiplizieren. Diese lässt sich durch den Term  $p^k \cdot q^{n-k}$  berechnen, da die Kugel in jedem Fall  $k$  mal nach rechts und  $n - k$  mal nach links fallen muss.

### Beispiele

#### Beispiel 1

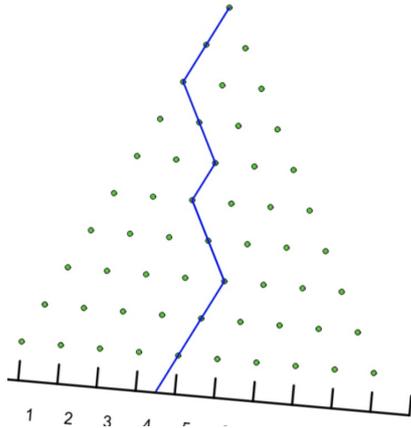


In diesem Fall ist die Wahrscheinlichkeit für die Kugeln, nach links und rechts zu fallen, gleich groß. Die Kugel soll im 6. Feld landen.

$$\begin{aligned} P_6 &= \binom{10}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10-6} \\ &= \frac{105}{512} \approx 0,205078125 \end{aligned}$$

#### Beispiel 2

Ist das Galton-Brett so gekippt, dass die Kugeln mit einer Wahrscheinlichkeit von  $2/3$  nach rechts fallen und mit einer Wahrscheinlichkeit



von  $1/3$  nach links, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit für die Kugel, im 8. Feld zu landen:

$$P_8 = \binom{10}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{10-8} \approx 0,003048$$

### Goldener Schnitt

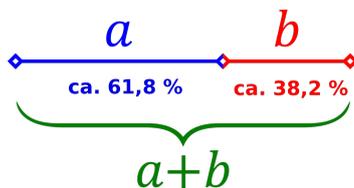
ELIZAVETA ZHABITCKAIA, PAUL  
KÄSTNER

Die nächste Haltestelle unserer Rundreise war der Goldene Schnitt.

Wenn eine Strecke im Verhältnis des Goldenen Schnitts geteilt wird, dann verhält sich die Länge der gesamten Strecke zur Länge des größeren Streckenabschnitts wie die Länge des größeren Streckenabschnitts zur Länge des kleineren.

Bezeichnet man den größeren Streckenabschnitt mit  $a$  und den kleineren mit  $b$ , dann gilt:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$



Streckenabschnitte beim Goldenen Schnitt<sup>2</sup>

Nach Umformen dieser Gleichung erhält man:

<sup>2</sup>Abbildung: Wikimedia (Wikimedia-User Stanne-red/Kmhkmh, als gemeinfrei gekennzeichnet)

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{a} &= \frac{a}{b} \\ \Leftrightarrow ab + b^2 &= a^2 \\ \Leftrightarrow a^2 - ab - b^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{a}{b} &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Man bezeichnet dieses Ergebnis mit:

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ (gelesen: Phi) und mit}$$

$$\Psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ (gelesen: Psi).}$$

Zwischen  $\Phi$  und  $\Psi$  gibt es interessante Beziehungen:

$$\Phi + \Psi = 1, \text{ da } \frac{1 + \sqrt{5} + 1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

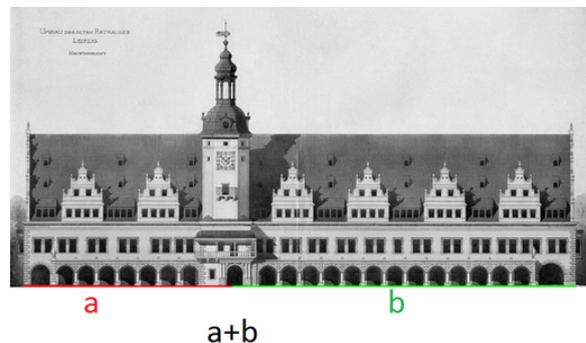
$$\Phi^2 = 1 + \Phi, \text{ da:}$$

$$\begin{aligned} \Phi^2 &= \frac{(1 + \sqrt{5})^2}{2^2} = \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} \\ &= \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ &= 1 + \Phi \end{aligned}$$

$$\Psi^2 = 1 + \Psi, \text{ da:}$$

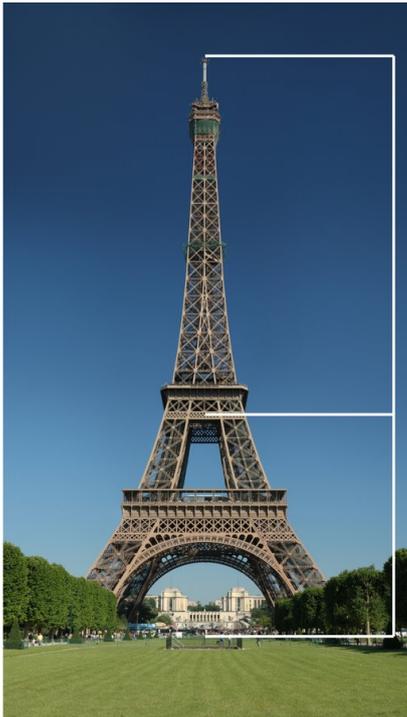
$$\begin{aligned} \Psi^2 &= \frac{(1 - \sqrt{5})^2}{2^2} = \frac{1 - 2\sqrt{5} + 5}{4} \\ &= \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ &= 1 + \Psi \end{aligned}$$

Den Goldenen Schnitt gibt es nicht nur in der Mathematik, sondern auch in der Architektur:



Beispiel aus der Architektur<sup>3</sup>

<sup>3</sup>Abbildung: Wikipedia, bearbeitet (Stadt Leipzig, als gemeinfrei gekennzeichnet)



Goldener Schnitt beim Eiffelturm<sup>4</sup>

Schon Leonardo da Vinci entdeckte den Goldenen Schnitt auch in der Natur, zum Beispiel bei Pflanzen, aber auch beim menschlichen Körper. So fand der goldene Schnitt auch seinen Weg in die Kunst.

Das sind nur wenige Beispiele von Vielen, in denen der Goldene Schnitt eine wichtige Rolle spielt.

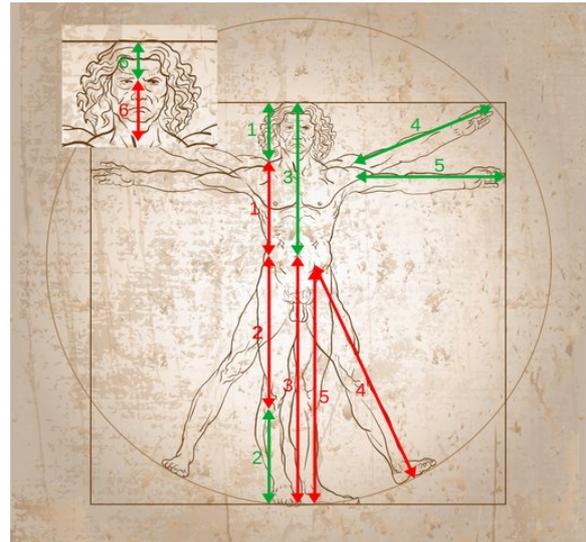
### Konstruktionen mit GeoGebra

MARIE MARTIN

Und wie kann man jetzt den Goldenen Schnitt darstellen? Obwohl der Goldene Schnitt eine irrationale Zahl ist, lässt er sich mit Zirkel und Lineal konstruieren. Wir benutzten dafür GeoGebra. GeoGebra ist ein mathematisches Tool, mit dem man vor allem Dinge konstruieren kann. Prinzipiell ist GeoGebra leicht zu bedienen, in der obersten Zeile gibt es eine Menüleiste, mit der man verschiedenste Dinge von Geraden bis Tangenten mit wenigen Mausklicks erstellen kann. Dieses Tool ist in

<sup>4</sup>Abbildung: Wikimedia, eigene Ergänzungen (Wikimedia-User Benh LIEU SONG, CC BY-SA 3.0)

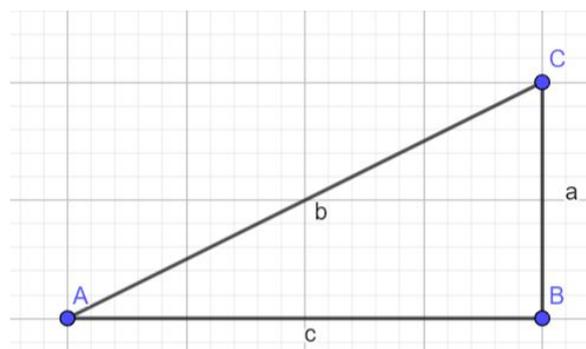
<sup>5</sup>Abbildung: Wikimedia, bearbeitet (Wikimedia-User Savak, als gemeinfrei gekennzeichnet)



Die rot markierten Strecken stehen zu den grünen Strecken mit gleicher Nummer im Verhältnis des Goldenen Schnittes.<sup>5</sup>

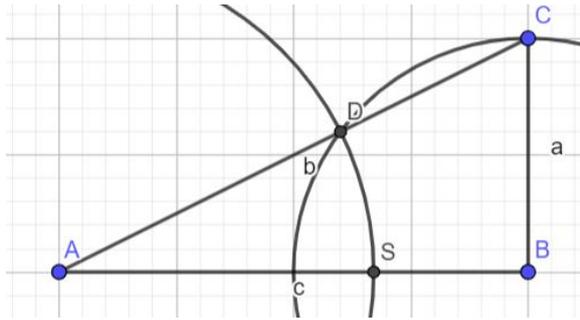
sofern praktisch, dass der zeitliche Aufwand gering ist, die Konstruktionen unglaublich exakt und die Konstruktionen auch im Nachhinein noch ohne große Probleme erweitert oder verbessert werden können.

Um den Goldenen Schnitt konstruieren zu können, wird zunächst ein rechtwinkliges Dreieck gezeichnet, dessen Seite  $a$  halb so lang ist wie  $c$ .



Dann wird ein Kreis mit dem Radius  $a$  um den Punkt  $B$  gezeichnet. Der Schnittpunkt des Kreises mit  $b$  wird  $D$  genannt. Anschließend wird ein weiterer Kreis mit dem Mittelpunkt  $A$  durch diesen Punkt  $D$  konstruiert. Der Schnittpunkt von dem zweiten Kreis und  $c$  wird  $S$  genannt. Nun teilt  $S$  die Strecke  $AB$  im Goldenen Schnitt.

Das lässt sich beweisen, denn laut dem Satz des Pythagoras gilt  $c^2 = a^2 + b^2$  beziehungsweise



se in diesem Beispiel  $b^2 = a^2 + c^2$ . In diesem speziellen Fall kann  $a^2$  als  $\left(\frac{1}{2}c\right)^2$  geschrieben werden und es ergibt sich:

$$b^2 = \left(\frac{1}{2}c\right)^2 + c^2.$$

Vereinfacht gilt dann  $b = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot c$ . Wird von der Strecke  $b$  die Strecke  $a$ , also  $\frac{1}{2}c$  abgezogen, erhält man (durch die Kreise in der Konstruktion) die Strecke  $AS$ . Diese ist  $\frac{\sqrt{5}}{2}c - \frac{1}{2}c$ .  $c$  kann ausgeklammert werden und für  $AS$  ergibt sich:

$$\frac{\sqrt{5}}{2}c - \frac{1}{2}c = c \cdot \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right) = c \cdot \Phi.$$

Da die Seite  $c$  im Goldenen Schnitt geteilt wird, gilt:  $\frac{c \cdot \Phi}{c} = \Phi$  q.e.d.

## Unser Kurslogo: das regelmäßige Fünfeck

Das regelmäßige Fünfeck ist ein Vieleck, welches fünf gleich lange Seiten und fünf gleich große Innenwinkel hat.

Wenn in diesem Fünfeck die Diagonalen eingezeichnet werden, lässt sich sowohl ein Pentagramm bzw. Fünfeckstern erkennen als auch ein weiteres regelmäßiges Fünfeck im Zentrum des ersten regelmäßigen Fünfecks.

Das Pentagramm war das Zeichen des Geheimbundes der Pythagoreer, die Gefolgsleute um Pythagoras von Samos.

Der Fünfeckstern wird auch Drudenfuß genannt. Im Mittelalter galt er als Zeichen gegen das Böse und den Teufel (Quelle Wikipedia).

Beispielsweise kann in Goethes Faust 1, Vers 1395, Mephistopheles die Türschwelle von

Fausts Zimmer nicht überschreiten, weil dort der Drudenfuß (ein Pentagramm mit einer Spitze nach unten – des Teufels Bart – und zwei Spitzen nach oben – des Teufel Hörner) zu sehen ist. Somit spielt das Fünfeck bzw. das Pentagramm schon seit langer Zeit eine wichtige Rolle.

Es fällt auf, dass es bei dieser Figur Streckenverhältnisse gibt, welche dem Goldenen Schnitt entsprechen. Eines dieser Verhältnisse ist die Außenseite  $a$  zur Diagonale  $d$ .

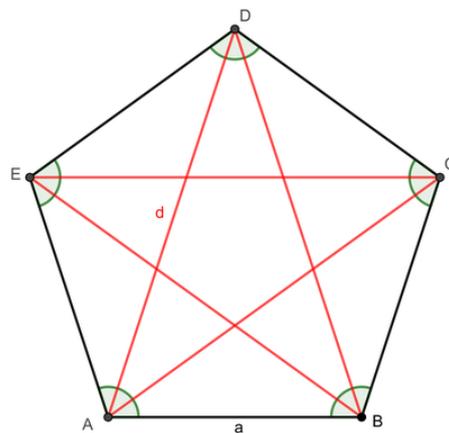
Schon die Griechen wussten um ca. 500 v. Chr., dass das Verhältnis der beiden Strecken irrational sein musste, obwohl ihr Zahlenverständnis nur rationale Zahlen kannte.

## Inkommensurabilität der Strecken im Fünfeck

Zwei reelle Zahlen  $a$  und  $b$  heißen kommensurabel (lat. zusammen messbar), wenn sie ganzzahlige Vielfache einer dritten reellen Zahl  $c$  sind. Es gibt also ein  $c \in \mathbb{R}$ , sodass gilt:

$$a = m \cdot c \text{ und } b = n \cdot c.$$

Der Quotient  $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$  ist also eine rationale Zahl:  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ .



Fünfeck mit Pentagramm in rot und Innenwinkel in grün

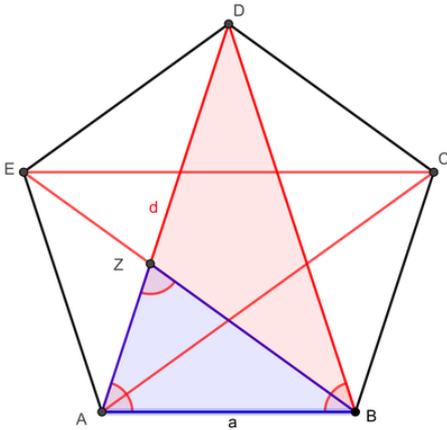
Sind zwei Zahlen nicht kommensurabel, so heißen sie inkommensurabel.

Alle irrationalen Zahlen sind inkommensurabel zur Zahl 1. Irrationale Zahlen sind z. B.  $\sqrt{2}$  und  $\pi$ .

Im Fünfeck sind die Längen einer Fünfeckseite  $a$  und eine Diagonale  $d$  zueinander inkommensurabel.

Behauptung:  $\frac{d}{a} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx 1,618$

Die Größe jedes Innenwinkels ist  $108^\circ$ . ABC bilden ein gleichschenkliges Dreieck mit den beiden gleichen Seiten  $a$  und der Basis  $d$ .



Fünfeck mit ähnlichen Dreiecken

Das Dreieck ABC hat einen stumpfen Winkel von  $108^\circ$  und zwei spitze Winkel von  $36^\circ$ . Es ist ein stumpfes Goldenes Dreieck.

Das Dreieck ABD ist ein spitzes Goldenes Dreieck. ABD ist ein gleichschenkliges Dreieck mit den Schenkeln  $d$  und der Basis  $a$ . Es hat den spitzen Winkel von  $36^\circ$  und die Basiswinkel von  $72^\circ$ . Ein Basiswinkel wird von einer weiteren Diagonalen halbiert. Das Dreieck ABZ ist deshalb zum Dreieck ABD ähnlich.

Das Restdreieck BDZ ist wiederum ein stumpfes Goldenes Dreieck.

Wegen der Ähnlichkeit von ABD und ZAB ergibt sich:

$$\frac{d}{a} = \frac{a}{d-a} \Leftrightarrow d^2 - a \cdot d - a^2 = 0$$

$$d_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \cdot a$$

Für die positive Lösung gilt:

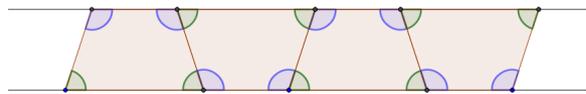
$$d_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot a \approx 1,618 \cdot a.$$

## Regelmäßiges Fünfeck aus einem Papierknoten

Knotet man einen Papierstreifen und streicht den Knoten glatt, entsteht ein regelmäßigen Fünfeck.

Löst man den Knoten auf, werden die gefalteten Kanten als Faltlinien erkennbar.

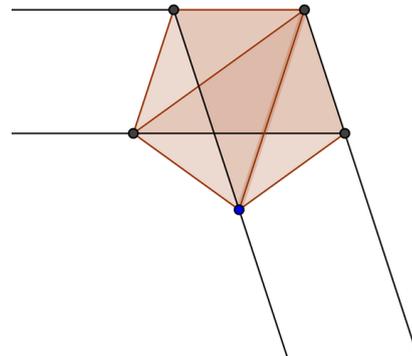
Die Faltlinien stellen vier Vierecke dar mit jeweils einem Paar paralleler Seiten und gleichlangen Schenkeln. Dies ist gut in der Abbildung an dem aufgerollten Papierstreifen mit Faltlinien zu erkennen.



Blaue Winkel:  $108^\circ$ , grüne Winkel:  $72^\circ$

Diese Vierecke sind gleichschenklige Trapeze; alle vier Trapeze sind zueinander kongruent.

Legt man nun diese vier Trapeze so übereinander, dass die kurze Seite nach außen zeigt, also die Außenseite eines Fünfecks bildet, entsteht ein Fünfeck.



## Folgen

### Fibonacci-Folge

MARIE MARTIN

Eine kleine mathematische Knobelei zum Einstieg:

Wir wollen eine Treppe mit  $n$  Stufen besteigen und dabei immer entweder eine (1) oder zwei

(2) Stufen nach oben laufen. Bei einer Treppe mit keiner Stufe haben wir nur eine Möglichkeit (nichts tun), bei einer Treppe mit einer Stufe auch nur eine Möglichkeit (1), bei einer Treppe mit zwei Stufen zwei Möglichkeiten (11, 2). Die Möglichkeiten, eine Treppe mit drei Stufen zu erklimmen, belaufen sich immerhin schon auf drei (111,12, 21).

Man könnte meinen, die Anzahl der Möglichkeiten sind einfach die Anzahl der Treppen, doch es fällt schnell auf, dass es bei einer Treppe mit vier Stufen nicht vier, sondern fünf Möglichkeiten gibt (1111, 22, 121, 211, 112).

Setzen wir dieses Muster fort, erhalten wir folgende Tabelle:

Anzahl Stufen	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl Möglichkeiten	1	1	2	3	5	8	13	21

Bei genauerem Hinsehen erkennt man, dass die Anzahl der Möglichkeiten immer die Summe ihrer beiden Vorgänger ist. Diese Folge wird nach Leonardo von Pisa, einem Kaufmann, der das arabische Zahlensystem nach Europa gebracht hat, auch genannt filius binaccij, als Fibonacci-Folge bezeichnet.

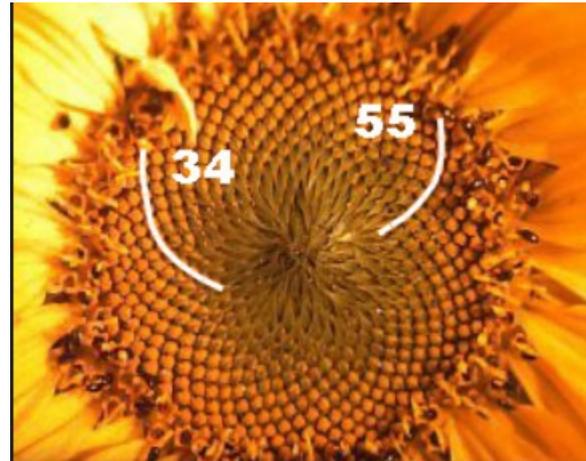
Eine allgemeine rekursive Definition der Fibonacci-Folge für  $n \geq 2$  lautet dementsprechend:

$$f(n) = f(n - 1) + f(n - 2).$$

Dabei wird definiert, dass  $f(0) = 1$  und  $f(1) = 1$  ist.

### Fibonacci-Zahlen in der Natur

Die Fibonacci-Zahlen finden sich sogar in der Natur. Betrachtet man eine Sonnenblume und zählt die Spiralen in die eine Richtung und die in die andere Richtung, erhält man zwei aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen. Das kann man auch bei sehr vielen anderen Blumen, Zapfen, einer Ananas und vielen mehr beobachtet werden.



Fibonacci-Zahlen beim Blütenstand einer Sonnenblume<sup>6</sup>

### Iterative Definition

Lässt man einen Rechner mit Hilfe der Formel  $f(n) = f(n - 1) + f(n - 2)$  eine hohe Fibonacci-Zahl ausrechnen, stellt man fest, dass der Rechner so schnell damit nicht fertig wird. Um z. B. die 100. Fibonacci-Zahl auszurechnen, muss der Computer die 99. und 98. Fibonacci-Zahl wissen. Für diese braucht der Rechner aber die 98. und 97. Fibonacci-Zahl für die 99. Fibonacci-Zahl, sowie zusätzlich die 96. Fibonacci-Zahl für die 98. Fibonacci-Zahl. Der Rechner muss also erst alle anderen Fibonacci-Zahlen vor der 100. ausrechnen und das braucht Zeit. Geht es auch schneller?

Fügt man die Fibonacci-Folge in eine Tabellenkalkulation ein, erstellt einen Graphen und fügt eine Trendlinie ein, sieht man, dass die Fibonacci-Zahlen auf dem Graphen einer exponentiellen Funktion liegen. Folglich kann die Fibonacci-Folge wie folgt beschrieben werden:

$$f(n) = c \cdot a^n, \text{ wobei } c \neq 0 \text{ und } a \neq 0.$$

Wegen  $f(n) = f(n - 1) + f(n - 2)$  gilt:

$$c \cdot a^n = c \cdot a^{n-1} + c \cdot a^{n-2}.$$

Teilt man die gesamte Gleichung durch  $c \neq 0$ , erhält man  $a^n = a^{n-1} + a^{n-2}$ .

Teilt man die Gleichung  $a^n = a^{n-1} + a^{n-2}$  durch  $a^{n-2}$ , erhält man:

$$a^2 = a + 1 \Leftrightarrow a^2 - a - 1 = 0.$$

<sup>6</sup>Abbildung: Wikimedia (Dr. Helmut Haß, CC BY-SA 3.0)

Diese Gleichung hat die Lösungen  $a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ . Dies ist der Goldene Schnitt, also  $a_1 = \Phi$  und  $a_2 = 1 - \Phi = \Psi$ .

Aus beiden Lösungen kann  $c$  und somit auch eine Gleichung für die  $n$ -te Fibonacci-Zahl hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} f(0) &= c \cdot \Phi^0 - c \cdot \Psi^0 = c - c = 0 \\ f(1) &= c \cdot \Phi^1 - c \cdot \Psi^1 \\ &= c \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - c \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = c \cdot \sqrt{5} = 1 \\ &\Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ f(n) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\Phi^n - \Psi^n) \end{aligned}$$

Mit diesem Term kann nun die  $n$ -te Fibonacci-Zahl ohne allzu großen Rechenaufwand und in relativ kurzer Zeit berechnet werden.

Das muss noch bewiesen werden:

Zunächst wird gezeigt, dass die Formel für die erste und zweite Fibonacci-Zahl gilt:

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\Phi - \Psi) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Da  $\Psi = 1 - \Phi$  gilt, kann in allen Formeln für  $\Psi$  auch  $1 - \Phi$  eingesetzt werden. Damit ist die Formel auch für die zweite Fibonacci-Zahl gültig:

$$\begin{aligned} f(2) &= \frac{\Phi^2 - (1 - \Phi)^2}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\Phi^2 - 1 + 2\Phi - \Phi^2}{\sqrt{5}} = \frac{2\Phi - 1}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{2 \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1 \end{aligned}$$

Allgemein gilt:

$$\begin{aligned} f(n - 2) + f(n - 1) &= \\ &= \frac{\Phi^{n-2} - \Psi^{n-2}}{\sqrt{5}} + \frac{\Phi^{n-1} - \Psi^{n-1}}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\Phi^{n-2} - \Psi^{n-2} + \Phi^{n-1} - \Psi^{n-1}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\Phi^{n-2} - \Psi^{n-2} + \Phi \cdot \Phi^{n-2} - \Psi \cdot \Psi^{n-2}}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Nun kann  $\Phi^{n-2}$  und  $\Psi^{n-2}$  ausgeklammert werden:

$$\begin{aligned} f(n - 2) + f(n - 1) &= \\ &= \frac{(1 + \Phi) \cdot \Phi^{n-2} - (1 + \Psi) \cdot \Psi^{n-2}}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Wegen  $\Phi^2 = 1 + \Phi$  und  $\Psi^2 = 1 + \Psi$  kann die obige Gleichung folgendermaßen vereinfacht werden:

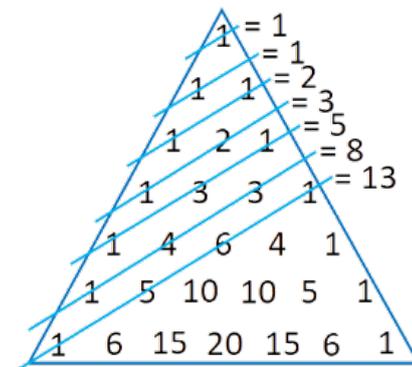
$$\begin{aligned} f(n - 2) + f(n - 1) &= \frac{\Phi^2 \cdot \Phi^{n-2} - \Psi^2 \cdot \Psi^{n-2}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\Phi^n - \Psi^n}{\sqrt{5}} = f(n) \quad \text{q. e. d.} \end{aligned}$$

## Die Fibonacci-Folge im Pascalschen Dreieck

MAJA EGE

Die Fibonacci-Zahlen kann man sogar im Pascalschen Dreieck entdecken, auch wenn sie schon etwas schwerer zu finden ist. Wir betrachten dafür die flacheren Diagonalen, wie hier dargestellt:

Wenn man jeweils die Summe aller auf der Diagonale liegenden Zahlen berechnet, erhält man 1, 1, 2, 3, ..., was genau den Fibonacci-Zahlen entspricht.



Natürlich ist die Fibonacci-Folge nicht die einzige interessante Folge in der Mathematik, es gibt noch unzählige weitere. Eine schon relativ komplexe, aber gut zu veranschaulichende Folge ist dabei die Catalan-Folge.

## Catalan-Folge

LISA FEE BRILL

Die Catalan-Zahlen bilden eine Zahlenfolge, die in einigen Bereichen der Mathematik eine wichtige Rolle spielt. Sie tritt z. B. in der Kombinatorik auf. Benannt sind diese Zahlen nach dem belgischen Mathematiker Eugene Charles Catalan (1814–1894).

Die Zahlenfolge beginnt mit den Zahlen 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, ...

Die allgemeine Formel, um die Catalan-Zahlen  $n \geq 0$  zu berechnen, lautet:

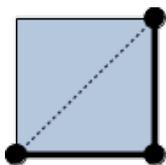
$$C_n = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}$$

### Die Catalan-Folge in der Kombinatorik

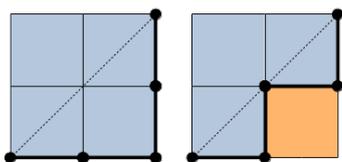
Man stellt sich ein Quadratgitter mit der Seitenlänge  $n$  vor. Wie viele mögliche Wege gibt es, von der linken unteren zur rechten oberen Ecke zu gelangen? Eine Diagonale ist von links unten nach rechts oben eingezeichnet, diese darf nicht überschritten werden und es darf immer nur nach rechts oder nach oben gegangen werden.



Mit einem Quadrat der Seitenlänge  $n = 0$  ergibt sich genau eine Möglichkeit: Weder nach rechts noch nach oben.



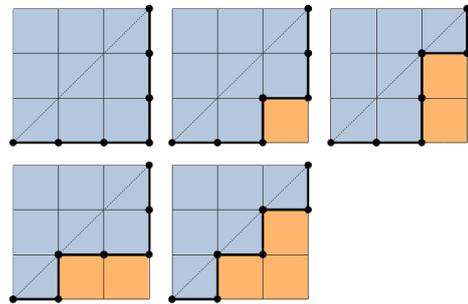
Bei einem Quadrat mit Seitenlänge  $n = 1$  gibt es wieder genau eine Möglichkeit: eins nach rechts, eins nach oben



Bei einem Quadrat mit Seitenlänge  $n = 2$  gibt es 2 Möglichkeiten:

- 2 nach rechts, 2 nach oben

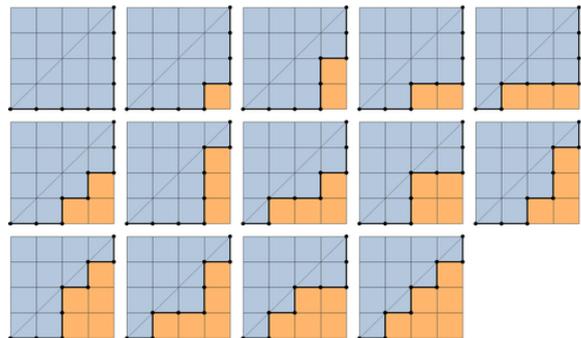
- eins nach rechts, eins nach oben, eins nach rechts, eins nach oben



Bei einem Quadrat mit Seitenlänge  $n = 3$  gibt es 5 Möglichkeiten:

- 3 rechts, 3 hoch
- 2 rechts, 1 hoch, 1 rechts, 2 hoch
- 2 rechts, 2 hoch, 1 rechts, 1 hoch
- 1 rechts, 1 hoch, 2 rechts, 2 hoch
- 1 rechts, 1 hoch, 1 rechts, 1 hoch, 1 rechts, 1 hoch

Bei einem Quadrat mit Seitenlänge  $n = 4$  sind es 14 Möglichkeiten, wie man in der Abbildung erkennt.



Die jeweiligen Anzahlen der Möglichkeiten bilden hintereinander die Catalan-Folge:

1, 1, 2, 5, 14, ...

Dies kann beliebig weitergeführt werden. Mit einem Quadrat mit der Seitenlänge  $n = 5$  gibt es 42 Möglichkeiten, bei  $n = 6$  dann 132 Möglichkeiten usw.

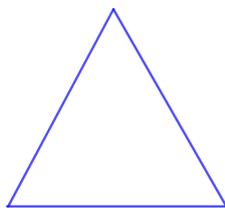
### Die Catalan-Folge in der Triangulation

Der vorherige Weg ist jedoch nicht die einzige Möglichkeit, sich die Catalan-Zahlen zu erschließen. Genauso taucht die Zahlenfolge

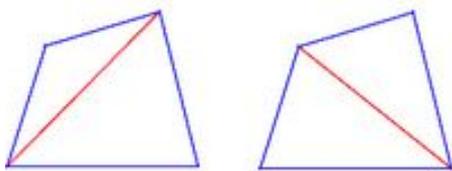
in der sogenannten Triangulation auf. Hierfür wird ein beliebiges  $n$ -Eck durch Diagonalen, die sich nicht überkreuzen, in Dreiecke geteilt. Hier wird wieder die Anzahl der Möglichkeiten für die unterschiedlichen Unterteilungen gezählt.



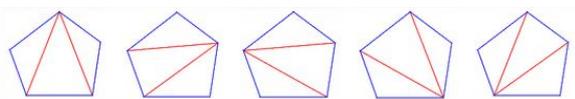
Zweieck: Hier können keine Diagonalen gezogen werden, daher gibt es genau eine Möglichkeit: nichts tun.



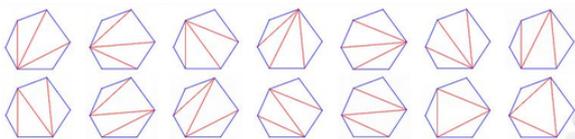
Dreieck: Auch hier können keine Diagonalen gezogen werden, es gibt wieder nur eine Möglichkeit.



Viereck: Es gibt 2 Möglichkeiten, das Viereck in Dreiecke zu unterteilen.



Fünfeck: 5 Möglichkeiten

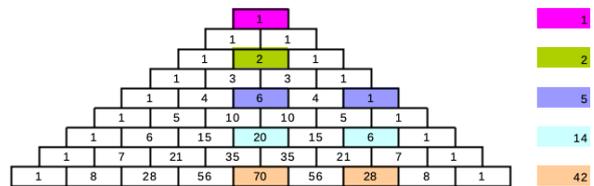


Sechseck: 14 Möglichkeiten

Auch hier wird die Catalan-Folge sichtbar, sobald man die Anzahl der Möglichkeiten betrachtet. Auch dies könnte weitergeführt werden (7-Eck: 42 Möglichkeiten, 8-Eck: 132 Möglichkeiten usw.).

### Die Catalan-Folge im Pascalschen Dreieck

Auch die Catalan-Zahlen lassen sich im Pascalschen Dreieck wiederfinden. Hierfür wird in einer Zeile die Differenz aus der Zahl, die auf der Symmetrieachse liegt und der Zahl (wenn diese denn vorhanden ist) zwei weiter rechts gebildet. Da nur auf jeder zweiten Zeile eine Zahl direkt auf der Mittellinie liegt, kann auch nur in jeder zweiten Zeile die nächste Catalan-Zahl berechnet werden.



In der 0. Zeile wird hier also die Zahl der Mittellinie, die 1 betrachtet. Da es keine Zahl zwei weiter rechts in der 0. Zeile gibt, folgt daraus direkt die erste Catalan-Zahl, die 1.

In Zeile Nummer 3 liegt die 2 auf der Symmetrieachse. Es gibt wiederum keine Nachbarzahl, also wird die 2 als nächste Zahl der Folge festgelegt.

In der 5. Zeile wird die 6 betrachtet. Zwei weiter rechts befindet sich eine 1. Nun wird also  $6 - 1 = 5$  gerechnet, daraus ergibt sich eine weitere Catalan-Zahl.

Auch dies kann unendlich weitergeführt werden.

### Stern-Brocot-Folge

MORITZ SIMON

Die Stern-Brocot-Folge wurde von Moritz Stern (1807–1894) und Achille Brocot (1817–1878) unabhängig voneinander entdeckt. Brocot war Uhrmacher und Stern Mathematiker. Die Folge ist Grundlage für den Stern-Brocot-Baum, welcher eine Anordnung aller positiven Rationalen Zahlen ist.

Die Bildungsvorschrift lautet:

$$S_0 = 0$$

$$S_1 = 1$$

$$S_{2n} = S_n$$

$$S_{2n+1} = S_n + S_{n+1}$$

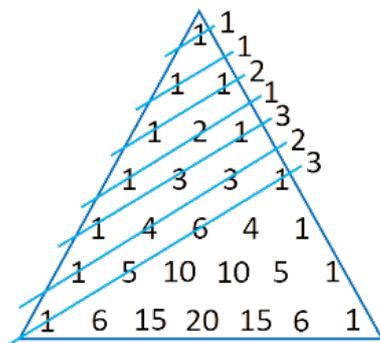
Die Folge der Zahlen lautet:

0, 1, 1, 2, 1, 3, 2, 3, 1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, ...

### Die Stern-Brocot-Folge im Pascalschen Dreieck

KATHARINA GRING

Obwohl die Herleitung der Folge etwas komplexer ist, ist sie im Pascalschen Dreieck geradezu offensichtlich. Werden in das Dreieck Diagonalen eingezeichnet und dann von den jeweiligen Zahlen auf den Diagonalen die Anzahl der ungeraden Zahlen gezählt, erkennt man die Stern-Brocot-Folge. Beispielsweise liegen auf der sechsten Diagonalen eine Eins, eine Vier und eine Drei, weshalb die Anzahl der ungeraden Zahlen bei Zwei liegt. Vergrößert man das Dreieck und zeichnet weitere Diagonalen ein, sieht man, dass dieser Zusammenhang im kompletten Dreieck vorzufinden ist.



### Das Grundprinzip des Beweisens

PAUL KÄSTNER

Wenn man mit einer offensichtlich wahren Aussage beginnt, gibt es nur die Möglichkeit, auf andere wahre Aussagen zu schließen, solange man korrekt vorgeht. Von der als wahr angenommenen Aussage „Heute ist Mittwoch“ kann man leicht und richtig darauf schließen,

dass es gerade nicht Montag ist. Genauso kann man von der offensichtlichen wahren Aussage „8 = 8“ darauf schließen, dass auch „4 = 4“ gilt.

Dagegen kann man aus der falschen Aussage „1 = -1“ durch Addition einer 3 auf beiden Seiten leicht auf die ebenfalls falsche Aussage „4 = 2“ schließen, aber durch Quadrieren beider Seiten auch auf die wahre Aussage „1 = 1“. Wichtig zum grundsätzlichen Beweisen ist die Erkenntnis, dass man aus einer falschen Aussage sowohl eine wahre, als auch eine falsche Aussage folgern kann.

Von einer wahren Aussage ausgehend lässt sich durch korrektes Schließen ausschließlich eine wahre Aussage folgern.

### Die Wahrheitstabelle

A	B	w	A∨B⇒A	A⇒B	B⇒A	A∧B	A∨B	A⊕B	A⊗B	A⇔B	A↯B	A↮B	A↱B	A↲B
w	w	w	w	w	w	w	w	f	f	f	f	f	f	f
w	f	w	w	f	f	f	w	w	w	f	f	f	f	f
f	w	w	f	w	w	f	w	f	w	f	w	w	w	w
f	f	w	f	w	w	f	w	f	w	f	w	w	w	w

Hat man zwei Aussagen A und B gegeben, so gibt es für deren Wahrheitswert vier verschiedene Kombinationen. Die Tabelle zeigt zu jeder dieser vier Möglichkeiten den Wahrheitswert von 16 weiteren Aussagen, die aus den Aussagen A und B gebildet werden können.

Mithilfe einer Wahrheitstabelle kann man oft einfach erkennen, was in der Mathematik zum Beweisen gebraucht wird.

### Beweisarten

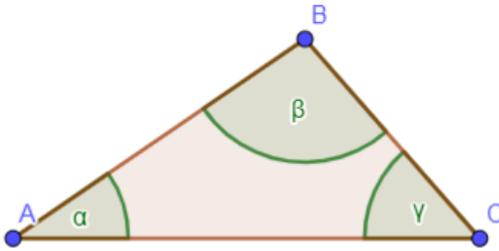
#### Direkter Beweis

ELIZAVETA ZHABITCKAIA

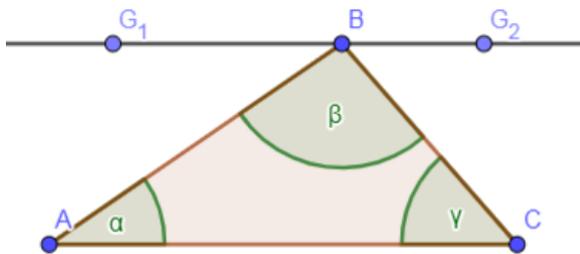
Eine Art des Beweisens ist der direkte Beweis. Beim direkten Beweis zeigt man mit Hilfe von bereits bekannten Tatsachen und Definitionen, dass die Aussage, die zu beweisen ist, wahr ist.

Ein Beispiel dafür ist der Beweis, dass die Winkelsumme eines Dreiecks 180° ist:

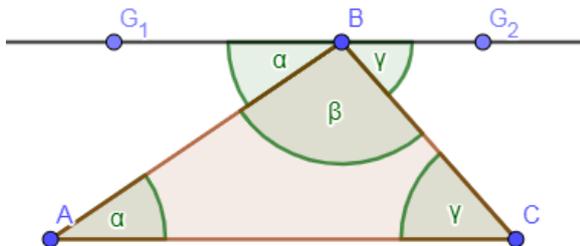
Gegeben ist ein zufälliges Dreieck  $\triangle ABC$ :



Im ersten Schritt zeichnet man eine Gerade  $g$  durch den Punkt  $B$  ein, die parallel zur Seite  $\overline{AC}$  des Dreiecks ist.



Man merkt, dass die Winkel  $\sphericalangle CAB$  und  $\sphericalangle G_1BA$  sowie  $\sphericalangle CBG_2$  und  $\sphericalangle BCA$  Wechselwinkel sind.



Folglich ist  $\sphericalangle G_1BA = \alpha$  und  $\sphericalangle CBG_2 = \gamma$ :

Die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  bilden also zusammen einen gestreckten Winkel. Da ein gestreckter Winkel  $180^\circ$  weit ist, gilt:  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$  q. e. d.

### Beweis durch Widerspruch

MAJA EGE

Eine weitere Art des Beweisens ist der Beweis durch Widerspruch. Dafür nimmt man das Gegenteil dessen an, was man beweisen möchte,

und führt diese Annahme zu einer Kontradiktion.

Ein Beispiel dafür ist der Beweis des Mathematikers Euklid, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Diese sind definiert als Zahlen, die genau zwei Teiler haben. Da wir beweisen wollen, dass die Menge der Primzahlen unendlich ist, nehmen wir erst einmal an, die Menge der Primzahlen sei endlich. Daraus ergibt sich die Menge  $P$ , die alle Primzahlen enthält. Da es endlich viele Primzahlen gebe, gibt es auch eine größte Primzahl. Diese Menge  $P$  sieht also so aus:

$$P = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_{max}\}$$

Um das zu einem Widerspruch zu führen, müssen wir beweisen, dass es, egal welche Zahl man als die größte Primzahl festsetzt, immer noch eine größere Primzahl gibt. Die Zahl

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_{max} + 1$$

bilden wir, indem wir alle Zahlen in der Menge  $P$  multiplizieren und 1 dazu addieren. Durch dieses  $+1$  kann  $n$  durch keine der bisherigen Primzahlen teilbar sein.

Also ergeben sich zwei Möglichkeiten: Entweder,  $n$  ist selbst eine Primzahl, oder  $n$  ist durch eine andere Primzahl teilbar, die noch nicht in der Menge  $P$  enthalten war. In beiden Fällen haben wir eine neue Primzahl gefunden, was eine Kontradiktion zu unserer ursprünglichen Annahme darstellt,  $P$  sei die endliche Menge aller Primzahlen.

Die Menge der Primzahlen muss also unendlich sein, was zu beweisen war.

### Beweis durch vollständige Induktion

MORITZ BRANDT

Mit dem Beweisverfahren der vollständigen Induktion beweist man Aussagen, die für alle natürlichen Zahlen ( $n \in \mathbb{N}$ ) gelten sollen. Zunächst beweist man die Gültigkeit der Aussage für  $n = 1$  (Induktionsanfang).

Nun zeigt man, dass aus der Gültigkeit der Aussage für ein beliebiges  $n$  (Induktionsvoraussetzung) die Aussage dann auch für  $n + 1$  gilt (Induktionsschluss).

Beispiel: Gaußsche Summenformel

$$\text{Es gilt: } 1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Induktionsanfang:  $\sum_{k=1}^1 k = 1$ .

Induktionsannahme: Die Formel sei für ein beliebiges  $n$  richtig:  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

Induktionsschritt: Zeige, dann gilt die Formel auch für  $n + 1$ :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k &= \frac{n \cdot (n+1)}{2} \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} k &= \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2} \end{aligned}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= (n+1) + \sum_{k=1}^n k \\ &\stackrel{\text{nach Ind.-Ann.}}{=} n+1 + \frac{n \cdot (n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2} \end{aligned}$$

## Beweis durch Äquivalenz

KATHARINA GRING

Eine weitere Beweistechnik ist der Äquivalenzbeweis. Dabei müssen beide Implikationsrichtungen bewiesen werden, also dass sowohl A aus B folgt als auch dass B aus A folgt. Dies nennt man auch Biimplikation. Man schreibt:

$$A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

Man sagt: „A gilt genau dann, wenn B gilt.“

Beispielsweise wird behauptet, dass eine ganze Zahl  $x$  genau dann gerade ist, wenn  $x^2$  gerade ist:

$$x \text{ gerade} \Leftrightarrow x^2 \text{ gerade}$$

Beweis: Zunächst wird mit direktem Beweis gezeigt: Ist  $x$  gerade, dann ist auch  $x^2$  gerade:  
 $x$  gerade  $\Rightarrow x^2$  gerade

Wenn  $x$  gerade ist, lässt sich  $x$  darstellen als  $x = 2n$  und es gilt:

$$x = 2n \Rightarrow x^2 = (2n)^2 = 4n^2 = 2 \cdot (2n^2)$$

Also ist  $x^2$  gerade.

Jetzt ist noch die andere Richtung zu zeigen:  
 $x^2$  gerade  $\Rightarrow x$  gerade

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

$x^2$  gerade  $\Rightarrow x$  gerade und

$x$  ungerade  $\Rightarrow x^2$  ungerade

Wir beweisen die zweite Aussage.

Wenn  $x$  ungerade ist, lässt sich  $x$  darstellen als  $x = 2n + 1$  und es gilt:

$$\begin{aligned} x = 2n + 1 &\Rightarrow x^2 = 4n^2 + 4n + 1 \\ &= 2 \cdot (2n^2 + 2n) + 1 \end{aligned}$$

$x^2$  ist also ungerade.

Somit wurden beide Implikationsrichtungen bewiesen.

## Mächtigkeiten, Zahlenmengen und Unendlichkeiten

KATHARINA GRING

### Klärung der Begrifflichkeiten

Bei der Mächtigkeit der Zahlenmengen geht es um die Anzahl der Zahlen. Beispielsweise hat die Menge  $M = \{1, 2, 3, 4\}$  die Mächtigkeit 4. Man schreibt:  $|M| = 4$ .

Die Potenzmenge von  $M$  ist die Menge aller ihrer Teilmengen:

$$\begin{aligned} \text{Pot}(M) &= \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \\ &\quad \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \\ &\quad \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \\ &\quad \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\} \end{aligned}$$

Man sieht:  $|\text{Pot}(M)| = 16$ , und allgemein gilt:

$$|M| = n \Rightarrow |\text{Pot}(M)| = 2^n.$$

Sieht man sich nun die natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}_0$  an und vergleicht sie mit den ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$ , kommt die Frage auf, welche der beiden eine größere Mächtigkeit haben.

$$\mathbb{N}_0 = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots - 2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Man könnte denken, dass die ganzen Zahlen eine größere Mächtigkeit haben, weil sie alle natürlichen Zahlen und die negativen Zahlen zusammen sind. Allerdings ist diese Annahme falsch, da man jeder ganzen Zahlen eine natürliche Zahl zuordnen kann.

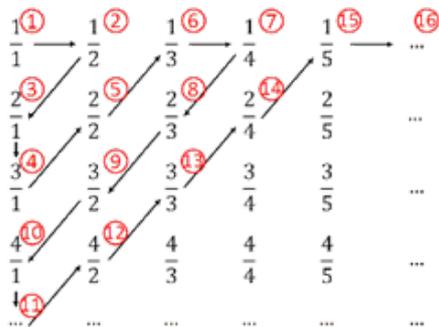
$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

$$\begin{array}{cccccc} | & | & | & | & | & | \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 & 6 \end{array}$$

Da beide Zahlenmengen bis ins Unendliche gehen, ist diese Zuordnung möglich, was bedeutet, dass die Mächtigkeiten der Zahlenmengen gleich groß sind:  $|\mathbb{N}_0| = |\mathbb{Z}|$ .

Nimmt man nun die rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  dazu, könnte man sich überlegen, dass hier nicht nur die Zahlen in Einserschritten bis ins Unendliche gehen, sondern auch z. B. zwischen der „0“ und der „1“ unendlich viele Zahlen liegen. Sie sind nämlich „dicht“, was bedeutet, dass zwischen einer rationalen Zahl  $r$  und einer anderen rationalen Zahl  $s$  immer noch eine weitere rationale Zahl  $t$  liegt. Daraus könnte gefolgert werden, dass die Mächtigkeit der Zahlenmenge der rationalen Zahlen größer ist als die Mächtigkeit der ganzen bzw. der natürlichen Zahlen.

Diese Überlegung scheint auf den ersten Blick zwar logisch, ist aber erstaunlicherweise falsch, da den rationalen Zahlen ebenso wie den ganzen Zahlen eine natürliche Zahl zugeordnet werden kann. Man geht hier wie in der Abbildung beschrieben vor.



$$\mathbb{Q} = \left\{ r = \frac{p}{q}; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$$

Die rationalen Zahlen bestehen aus den Brüchen  $r$  bzw. den Divisionen von  $p$  durch  $q$ ,

wobei  $p$  zu den ganzen Zahlen und  $q$  zu den natürlichen Zahlen gehört.

Da man die rationalen Zahlen deshalb genauso den ganzen Zahlen zuordnen kann, ist ihre Mächtigkeit dieselbe wie die der ganzen (und natürlichen) Zahlen.

Die Mächtigkeit all dieser Zahlenmengen wird „Aleph 0“ genannt und ist unendlich. Es wird wie folgt geschrieben:  $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ .

Es ist „Aleph 0“, da es eine weitere Unendlichkeit gibt, die größer ist als die zuvor genannte Unendlichkeit. Diese größere Unendlichkeit gilt als „überabzählbar“, da man nicht wie zuvor jeder Zahl eine natürliche Zahl zuordnen kann. Man nennt sie „Aleph 1“ und schreibt sie  $\aleph_1$ .

Ein Beispiel für Aleph 1 ist die Potenzmenge der natürlichen Zahlen, da man diese nicht abzählen kann.

Daraus folgt:  $|\mathbb{N}| < |\text{Pot}(\mathbb{N})|$  und  $\aleph_0 < \aleph_1$ .

**Beweise**

Nun folgt der Beweis, dass die Potenzmenge der natürlichen Zahlen überabzählbar ist. Dabei nimmt man zunächst an, die Potenzmenge der natürlichen Zahlen sei abzählbar.

Die Potenzmenge der natürlichen Zahlen besteht dann aus den Mengen  $A_n$ , wobei  $n$  zu den natürlichen Zahlen gehört und  $A_n$  eine Teilmenge der natürlichen Zahlen ist:

$$\text{Pot}(\mathbb{N}) = \{A_n, n \in \mathbb{N}, A_n \subseteq \mathbb{N}\}.$$

Betrachtet man die Menge  $A = \{A_n, n \notin A_n\}$ , so sind das Teilmengen von  $\mathbb{N}$ , die ihren Index nicht als Element enthalten. Da die Menge in der Potenzmenge der natürlichen Zahlen enthalten ist, gibt es eine Zahl  $m \in \mathbb{N}$  mit  $A = A_m$ .

Die Zahl  $m$  ist nun entweder in der Menge  $A$  enthalten oder nicht.

Falls  $m$  in der Menge enthalten ist, lässt sich allerdings daraus folgern, dass  $m$  auch gleichzeitig nicht in der Menge  $A$  enthalten sein kann, da davor definiert wurde, dass  $A$  und  $A_m$  gleich sind:

$$m \in A = A_m \Rightarrow m \notin A$$

Falls  $m$  nicht in der Menge  $A$  enthalten ist, kann daraus geschlossen werden, dass  $m$  gleichzeitig in der Menge enthalten sein muss.

$$m \notin A = A_m \Rightarrow m \in A$$

Aus diesem Widerspruch muss man schließen, dass die Potenzmenge der natürlichen Zahlen nicht abzählbar ist, sie ist also überabzählbar.

Damit ist  $|Pot(\mathbb{N})| > \aleph_0$ , man setzt:

$$|Pot(\mathbb{N})| > \aleph_1.$$

Die Frage ist nun, was mit den reellen Zahlen ist.

Im Folgenden wird bewiesen, dass die reellen Zahlen ebenfalls überabzählbar sind.

Die Annahme ist hier, die reellen Zahlen seien doch abzählbar, damit man die Aussage durch einen Widerspruch beweisen kann. Hierfür wird nur ein kleiner Teil der reellen Zahlen betrachtet, und zwar die Menge  $M_{[0,1]}$  der reellen Zahlen zwischen 0 und 1.

Man geht wie folgt vor, um die Zahlen zu beschreiben:

$$\begin{aligned} r_1 &= 0, r_{11} r_{12} r_{13} r_{14} \dots \\ r_2 &= 0, r_{21} r_{22} r_{23} r_{24} \dots \\ r_3 &= 0, r_{31} r_{32} r_{33} r_{34} \dots \\ r_4 &= 0, r_{41} r_{42} r_{43} r_{44} \dots \\ &\vdots \\ r_n &= 0, r_{n1} r_{n2} r_{n3} r_{n4} \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Diese Zahlen sind alle reelle Zahlen, die in der Menge  $M_{[0,1]}$  enthalten sind. Da man sie nummerieren kann, sind sie abzählbar, doch das Problem ist, dass es mindestens eine Zahl gibt, die nicht in diesem Schema enthalten ist. Nimmt man nämlich von allen Zahlen, die auf diese Art aufgebaut sind, die Stelle  $r_{ii}$  und ändert diese Stelle ab, indem man zu dieser Ziffer jeweils 1 addiert (bei der 9 wird diese Ziffer zu einer 0), und bildet so eine neue Zahl  $r$  mit diesen Stellen, so wurde eine neue Zahl erschaffen, die noch nicht in diesem Schema enthalten ist:

$$r = 0, r_1 r_2 r_3 r_4 \dots$$

Dabei ist:

$$r_i = r_{ii} + 1$$

Da die Zahl  $r$  nicht in diesem Schema bzw. der Menge  $M_{[0,1]}$  enthalten ist – und somit die Menge  $M_{[0,1]}$  nicht abzählbar ist –, sind die reellen Zahlen auch nicht abzählbar, da die Menge  $M_{[0,1]}$  davon eine Teilmenge ist. Dies bedeutet, dass die reellen Zahlen überabzählbar sind, genauso wie die Potenzmenge der natürlichen Zahlen.

Hiermit endet unsere Rundreise durch die Mathematik. Zwei Wochen lang beschäftigte sich der Mathematikurs mit den unterschiedlichsten mathematischen Teilgebieten und stellte dabei fest, dass letztlich doch alles miteinander zusammenhängt. So verbindet das Pascalsche Dreieck Zahlenfolgen mit der Kombinatorik. Der Eiffelturm, ein Fünfeck und ein Tannenzapfen stehen durch den Goldene Schnitt miteinander in Verbindung. Wir hatten sehr viel Freude dabei, das hier Beschriebene zu entdecken, und hoffen, dass wir auch Sie beim Lesen für unsere Rundreise begeistern konnten.

## Unser Kurs

**Moritz S.** Für Moritz hieß die Online-Zeit nicht, drinnen vorm Computer zu sitzen, sondern draußen im Garten an Formeln zu knobeln. Dabei hatte er gelegentlich Gesellschaft von seiner Katze, die ihm sicher auch manchmal die richtige Lösung zumaunzte. Wir sind alle sehr froh, dass er in unserem Kurs gelandet ist, denn er hätte genauso gut den Informatik-Kurs meistern können. Außerhalb unseres Kurses – bei Challenges oder Rätseln – wäre er nie auf die Idee gekommen zu schummeln oder uns etwas zu verraten, egal wie lange wir bettelten. Das zeigt, wie vertrauenswürdig er ist, aber trotzdem alles mit Humor nimmt.

**Paul B.** war immer ein guter Ansprechpartner für uns und beantwortete alle unsere Fragen. Er trug immer zu unserem Thema passende Shirts, über die wir bei Gelegenheit auch diskutierten. In den letzten fünf Minuten der Sommerakademie wollte er uns noch etwas beibringen, und er riss uns mit seiner

lustigen und verständnisvollen Art immer mit, was unsere Zeit im Kurs gleichzeitig spaßiger und noch interessanter machte.

**Moritz B.** ist nicht nur in Mathe besonders gut, sondern machte uns auch im Tischtennis platt. In jeder freien Minute war die ganze Gruppe bei der Tischtennisplatte, was unsere Freundschaften vertiefte. Seine Vorliebe für Schokolade machte ihn nur noch sympathischer, genauso wie er während der Vorbereitung unserer Präsentation für sich einstand und seine Ideen verteidigte, was den Vortrag eigentlich nur besser machte.

**Matthias** Unser Kursleiter Matthias nahm uns mit voller Energie und Elan mit auf unsere Rundreise durch die Mathematik. Mit vollem Einsatz kümmerte er sich um uns und vor allen Dingen darum, wie wir uns am Ende unserer Reise präsentieren. Ihm war es wichtig, unseren Kurs gut zur Geltung zu bringen und unsere Präsentationen, nicht selten durch „Überstunden“, zu perfektionieren. Dadurch lernten wir nicht nur, wie man z. B. Binomialkoeffizienten berechnet, sondern vielmehr, wie wir uns im Team einer Aufgabe stellen und mithilfe von Matthias' wertvollen Tipps eine Präsentation erschaffen, die „Nicht-Mathematikern“ (hoffentlich) einfach erklärt, wie denn nun der Eiffelturm mit Tannenzapfen und der Mathematik zusammenhängt.

**Mareike** war unsere „emotionale Stütze“ während der Akademie. Mit ihr konnte man über alles reden, sie intervenierte, sobald uns allen die Köpfe rauchten, weil Matthias und Paul so begeistert von etwas waren, und war immer für einen Spaß zu haben. Auch ihre Spiele waren einzigartig, oft einfach zu verstehen, doch für uns Mathematiker gelegentlich verwirrend.

**Marie** war unser „Nesthäkchen“, von dem niemand gedacht hätte, dass sie so jung ist. Marie konnte nach Ende der zwei Wochen Sommerakademie eine echte Leistung erzielen: Ihrem Vater, einem Mathematiker, etwas zu erklären, was dieser noch nicht wusste! Marie war ein wichtiger Bestandteil unseres Kurses, mit geschickten Überlegungen und Ideen brachte sie unsere Rundreise

auf neue, unentdeckte Wege und war sich nie für eine lustige Bemerkung zu schade.

**Katharina** war immer hilfsbereit und engagiert, wenn es ans Organisieren ging. Nur beim Tischtennis kannte sie keine Gnade, obwohl sie felsenfest behauptete, das „war keine Absicht“. Mit ihrem Outfit erinnerte sie an eine Sportlehrerin und war beim morgendlichen Zirkeltraining sehr motivierend.

**Luis** war sehr interessiert an den Themen, die behandelt wurden, und beteiligte sich aktiv daran. Außerdem stellte er viele wichtige Fragen, die die Gruppe zum Vertiefen und Verbreiten von neu zu entdeckenden Gebieten der Mathematik brachte. So landeten wir am Ende bei einem ganz anderen Themenbereich, den unsere Kursleiter gar nicht vorgesehen hatten.

**Leonardo** war ein Verfechter der Liebe und plädierte regelmäßig dafür, mehr Liebe in unser von Mathe vollgestopftes Gehirn zu bringen, vorzugsweise auch während des Tischtennis. Allerdings war er ein schlechtes Vorbild und stopfte während der zwei Wochen sein Gehirn hauptsächlich mit noch mehr Mathe voll. Er brachte unsere Gruppe sehr weiter und war ein unverzichtbarer Bestandteil des Kurses.

**Maja** brachte sehr viel Vorwissen zum Mathekurs mit. Fast keine Zahlenfolge war vor ihr sicher. Ihr Wissen brachte sie immer motiviert und verständlich ein. Mathe war insgesamt der perfekte Kurs für sie: Das Tolle an Mathe ist für sie, dass sowohl Versuche als auch Ausflüge in die Natur, bei denen einem Schnecken und Pilze begegnen könnten, nicht häufig sind. Den Witz: „Zwei Schnecken treffen sich im Wald. Die eine hat ein blaues Auge. Auf die Frage, wie das entstanden sei, antwortet sie: ‚Da war ich neulich im Wald und zack, auf einmal schießt so ein verantwortungsloser Pilz vor mir aus dem Boden. Da konnte ich nicht mehr ausweichen.‘“ fand Maja begrenzt witzig.

**Paul K.** denkt viel schneller, als er sprechen kann – und das will etwas heißen, denn auch beim Sprechen überholt er sich manchmal selbst. Von außen sah man ihm die Begeis-

terung für die Mathematik schon von Weitem an, denn er trug immer ein T-Shirt mit einem mathematischen Bild oder Spruch. Ohne Paul wäre der Kurs bestimmt langweiliger gewesen, denn sein schnelles und manchmal sprunghaftes Denken führte uns oft zu Themen, die nicht direkt geplant waren, aber unseren Horizont dennoch erweiterten.

**Elisa** hat das besondere Talent, ihr Wissen nicht sofort jedem zeigen zu müssen, auch wenn sie, einmal mit den Geometrie-Aufgaben angefangen, schneller fertig war, als wir anderen kucken konnten. Genauso lief es bei zahlreichen Tischtennisrunden, bei denen sie sehr bemüht war, uns den

Ball so nett zuzuspielen, dass ihr das am Ende häufig selber zum Verhängnis wurde. Trotzdem gab sie beim Tischtennis nie auf, was uns viele lustige Stunden brachte.

**Lisa** war und ist ein beliebtes Mitglied unserer Gruppe. Aber nicht nur das. Sie erstaunte uns ganz schön, als sie ganze 45 Liegestütze am Stück schaffte und damit alle in den Schatten stellte. Beim Tischtennisspielen fehlte uns meistens ein Schläger. Doch Lisa fand sich bereit, ohne zu spielen. Das tat ihrem Können aber keinen Abbruch – einige Male gewann sie sogar ohne Schläger gegen alle anderen. Alles in allem ist Lisa eine bewundernswerte Person und war eine Bereicherung für unsere Gruppe.



## Danksagung

Wir möchten uns an dieser Stelle bei denjenigen herzlich bedanken, die die 18. JuniorAkademie Adelsheim / Science Academy Baden-Württemberg überhaupt möglich gemacht und in besonderem Maße zu ihrem Gelingen beigetragen haben.

Finanziell wurde die Akademie in erster Linie durch die Stiftung Bildung und Jugend, die Schwarz-Stiftung, die Hopp-Foundation und den Förderverein der Science Academy unterstützt. Dafür möchten wir allen Unterstützern ganz herzlich danken.

Die Science Academy Baden-Württemberg ist ein Projekt des Regierungspräsidiums Karlsruhe, das im Auftrag des Ministeriums für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg für Jugendliche aus dem ganzen Bundesland realisiert wird. Wir danken Frau Anja Bauer, Abteilungspräsidentin der Abteilung 7 – Schule und Bildung des Regierungspräsidiums Karlsruhe, der Leiterin des Referats 75 – Allgemein bildende Gymnasien, Frau Leitende Regierungsschuldirektorin Dagmar Ruder-Aichelin, und Herrn Jan Wohlgemuth, Regierungsschuldirektor und Stellvertretender Leiter des Referats 37 – Allgemein bildende Gymnasien am Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg.

Koordiniert und unterstützt werden die JuniorAkademien von der Bildung & Begabung gGmbH in Bonn, hier gilt unser Dank der Koordinatorin der Deutschen Schüler- und JuniorAkademien Frau Ulrike Leithof, der Referentin für die Akademien Dorothea Brandt sowie dem gesamten Team.

Lange war nicht klar, in welchem Format die Akademie in den Zeiten der Pandemie stattfinden kann. Umso mehr hat es uns gefreut, dass wir uns zumindest im Wechsel in Adelsheim treffen konnten. Dort waren wir wie immer zu Gast am Eckenberg-Gymnasium mit dem Landesschulzentrum für Umwelterziehung (LSZU). Für den durch die Coronasituation bedingten Extraaufwand, die herzliche Atmosphäre und die idealen Bedingungen auf dem Campus möchten wir uns stellvertretend für alle Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter bei dem Schulleiter des Eckenberg-Gymnasiums Herrn Oberstudiendirektor Martin Klaiber sowie dem Abteilungsleiter des LSZU Herrn Studiendirektor Christian Puschner besonders bedanken.

Zuletzt sind aber auch die Leiterinnen und Leiter der Kurse und der kursübergreifenden Angebote gemeinsam mit den Schülermentoren und der Assistenz des Leitungsteams diejenigen, die mit ihrer hingebungsvollen Arbeit das Fundament der Akademie bilden.

Diejenigen aber, die die Akademie in jedem Jahr einzigartig werden lassen und sie zum Leben erwecken, sind die Teilnehmerinnen und Teilnehmer. Deshalb möchten wir uns bei ihnen und ihren Eltern für ihr Engagement und Vertrauen ganz herzlich bedanken.



## Bildnachweis

- Seite 13, Abbildung Elektromagnetische Absorption in der Erdatmosphäre:  
 Wikimedia, [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Atmospheric\\_electromagnetic\\_opacity-de.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Atmospheric_electromagnetic_opacity-de.svg)  
 Originalbild: NASA, SVG: Wikimedia-User Mysid/Ariser  
 Als gemeinfrei gekennzeichnet
- Seite 16, Abbildung Strahlungsspektrum von Schwarzkörpern:  
 Wikimedia, [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:BlackbodySpectrum\\_loglog\\_de.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:BlackbodySpectrum_loglog_de.svg)  
 Wikimedia-User Prog  
 CC BY-SA 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/legalcode>)
- Seite 17, Abbildung Spin-Flip beim Wasserstoff:  
 Wikimedia, <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hydrogen-SpinFlip.svg>  
 Wikimedia-User Tiltec  
 Als gemeinfrei gekennzeichnet
- Seite 19, Abbildung Krebsnebel:  
 Hubblesite, <https://hubblesite.org/contents/media/images/2005/37/1823-Image.html>  
 NASA, ESA, J. Hester and A. Loll (Arizona State University)
- Seite 20, Abbildung Schwarzes Loch M87\*:  
 ESO, <https://www.eso.org/public/images/eso1907a/>  
 EHT-Kollaboration  
 CC BY-SA 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/legalcode>)
- Seite 20, Abbildung Galaxie Messier 87:  
 NASA/Hubble, <https://hubblesite.org/contents/media/images/2000/20/968-Image.html>  
 NASA und das Hubble Heritage Team (STScI/AURA)
- Seite 22, Abbildung Arecibo-Botschaft „Arecibo message light“:  
 Wikimedia, [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Arecibo\\_message\\_light.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Arecibo_message_light.svg)  
 Wikimedia-User Arne Nordmann (norro)  
 CC BY-SA 3.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/legalcode>)
- Seite 23, Abbildung Wow-Signal:  
 Wikimedia, [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wow\\_signal.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wow_signal.jpg)  
 Big Ear Radio Observatory and North American AstroPhysical Observatory (NAAPO)  
 Als gemeinfrei gekennzeichnet
- Seite 23, Abbildung Verlauf der Empfangsstärke des Wow-Signals:  
 Wikimedia, [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wow\\_signal\\_profile.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wow_signal_profile.svg)  
 Wikimedia-User Maxrossomachin  
 CC BY-SA 3.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/legalcode>)
- Seite 40, Abbildung der Skinner-Box:  
 Wikimedia, [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Skinner\\_box\\_scheme\\_01.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Skinner_box_scheme_01.svg)  
 Wikimedia-User Andreas1, Bearbeitungen Pixelsquid  
 CC BY-SA 3.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/legalcode>)
- Seite 51, Abbildung Galton-Bett:  
 Wikimedia, <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Galton-Brett.svg>  
 Wikimedia-User Chrischi  
 Als gemeinfrei gekennzeichnet
- Seite 52, Abbildung Streckenabschnitte beim Goldenen Schnitt:  
 Wikimedia, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=19816440>  
 Wikimedia-User Stannered/Kmhkmh  
 Als gemeinfrei gekennzeichnet
- Seite 52, Abbildung Rathaus von Leipzig:  
 Wikipedia, <https://de.wikipedia.org/w/index.php?curid=8162374>

- Stadt Leipzig, eigene Ergänzungen  
Als gemeinfrei gekennzeichnet
- Seite 53, Abbildung Eiffelturm:  
Wikimedia, [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tour\\_Eiffel\\_Wikimedia\\_Commons.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tour_Eiffel_Wikimedia_Commons.jpg)  
Wikimedia-User Benh LIEU SONG, eigene Ergänzungen  
CC BY-SA 3.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/legalcode>)
- Seite 53, Abbildung Leonardo da Vinci „Vitruvian Man“ (mit Ergänzungen):  
Wikimedia, [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Da\\_Vinci\\_Vitruve\\_Luc\\_Viatour\\_2.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Da_Vinci_Vitruve_Luc_Viatour_2.svg)  
Wikimedia-User Savak, eigene Ergänzungen  
Als gemeinfrei gekennzeichnet
- Seite 56, Abbildung Sonnenblume:  
Wikimedia, [https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Goldener\\_Schnitt\\_Bluetenstand\\_Sonnenblume.jpg](https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Goldener_Schnitt_Bluetenstand_Sonnenblume.jpg)  
Dr. Helmut Haß  
CC BY-SA 3.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/legalcode>)
- Seite 69, Abbildung Blutfluss durch das menschliche Herz:  
Wikimedia, <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Latidos.gif>  
Wikimedia-User josiño, bearbeitet  
Als gemeinfrei gekennzeichnet
- Seite 84, Abbildung Insulinpumpe:  
Wikipedia, [https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Wearing\\_pump.JPG](https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Wearing_pump.JPG)  
Björn Heller  
CC BY-SA 2.0/de (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/de/legalcode>)
- Seite 124, Abbildung Elektromagnetische Absorption in der Erdatmosphäre:  
Wikimedia, [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Atmospheric\\_electromagnetic\\_opacity-de.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Atmospheric_electromagnetic_opacity-de.svg)  
Originalbild: NASA, SVG: Wikimedia-User Mysid/Ariser  
Als gemeinfrei gekennzeichnet
- Seite 125, Abbildung Photoeffekt:  
Wikimedia, [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Photoelectric\\_effect\\_in\\_a\\_solid\\_-\\_diagram.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Photoelectric_effect_in_a_solid_-_diagram.svg)  
Wikimedia-User Ponor  
CC BY-SA 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/legalcode>)
- Seite 125, Abbildung Hallwachsversuch:  
Serlo-Lernplattform, <https://de.serlo.org/community/52504/äußerer-photoelektrischer-effekt-hallwachs-effekt>  
Serlo  
CC BY-SA 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/legalcode>)
- Seite 126, Abbildung Doppelspaltversuch:  
Wikimedia, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=61510632>  
Johannes Kalliauer  
Als gemeinfrei gekennzeichnet
- Seite 126, Abbildung Interferenzmuster:  
Wikimedia, [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Single\\_slit\\_and\\_double\\_slit3.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Single_slit_and_double_slit3.jpg)  
Wikimedia-User Jordgette, Ausschnitt  
CC BY-SA 3.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/legalcode>)
- Seite 129, Abbildung Silizium-Atom:  
Enargus, [https://www.enargus.de/pub/bscw.cgi/d11567-2/\\*/\\*Silizium.html?op=Wiki.getwiki](https://www.enargus.de/pub/bscw.cgi/d11567-2/*/*Silizium.html?op=Wiki.getwiki)  
Enargus  
CC BY-SA 3.0 DE (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/de/legalcode>)
- Seite 130, Abbildung p-n-Übergang:  
Enargus, [https://www.enargus.de/pub/bscw.cgi/d14511-2/\\*/\\*p-n-Übergang.html?op=Wiki.getwiki](https://www.enargus.de/pub/bscw.cgi/d14511-2/*/*p-n-Übergang.html?op=Wiki.getwiki)  
Enargus  
CC BY-SA 3.0 DE (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/de/legalcode>)
- Seite 132, Abbildung Verluste einer Solarzelle:  
Enargus, [https://www.enargus.de/pub/bscw.cgi/d13357-2/\\*/\\*Verluste\\_einer\\_Solarzelle.html?op=Wiki.getwiki](https://www.enargus.de/pub/bscw.cgi/d13357-2/*/*Verluste_einer_Solarzelle.html?op=Wiki.getwiki)  
Enargus  
CC BY-SA 3.0 DE (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/de/legalcode>)

Alle anderen Abbildungen sind entweder gemeinfrei oder eigene Werke.

Bearbeitungen von Bilder unter eine CC-SA-Lizenz werden hiermit unter derselben Lizenz weitergegeben.