Deutsche JuniorAkademien

JuniorAkademie Adelsheim

11. Science Academy Baden-Württemberg 2013

Astronomie

Chemie

Germanistik/Geschichte

Mathematik

Physik/Informatik

TheoProx

H.W. & J. Hector Stiftung

Regierungspräsidium Karlsruhe
Abteilung 7 – Schule und Bildung

Dokumentation der JuniorAkademie Adelsheim 2013

11. Science Academy Baden-Württemberg

Träger und Veranstalter der JuniorAkademie Adelsheim 2013:
Regierungspräsidium Karlsruhe
Abteilung 7 –Schule und Bildung–
Hebelstr. 2
76133 Karlsruhe
Tel.: (0721) 926 4454
Fax.: (0721) 933 40270
E-Mail: georg.wilke@scienceacademy.de
petra.zachmann@scienceacademy.de
www.scienceacademy.de

Die in dieser Dokumentation enthaltenen Texte wurden von den Kurs- und Akademieleitern sowie den Teilnehmern der 11. JuniorAkademie Adelsheim 2013 erstellt. Anschließend wurde das Dokument mit Hilfe von LaTeX gesetzt.

Gesamtredaktion und Layout: Jörg Richter
Druck und Bindung: RTB Reprotechnik Bensheim

Vorwort

Mittlerweile sind es schon 11 Jahre, in welchen sich rund 70 Schülerinnen und Schüler aus ganz Baden-Württemberg gemeinsam mit dem 30-köpfigen Leitungsteam im Rahmen der Science Academy Baden-Württemberg in Adelsheim treffen. Sie verbringen dort auf dem Eckenberg am Landesschulzentrum für Umwelterziehung das Eröffnungswochenende, die 14-tägige Akademie im Sommer und das Dokumentationswochenende.

In dieser Zeit wächst aus den einzelnen Teilnehmern eine große Gemeinschaft, die auch über die Zeit der Akademie hinaus bestehen bleibt. Jeder Einzelne beschäftigt sich während dieser Zeit nicht nur mit den naturwissenschaftlichen Inhalten der Kurse, sondern entwickelt sich auch persönlich weiter.

Um der Akademie über die Kursarbeit hinaus einen Rahmen zu geben, steht sie in jedem Jahr unter einem übergeordneten Motto.

In diesem Jahr war dieses Motto das Thema „Licht“. Natürlich ist Licht mit unglaublich vielen Assoziationen verbunden, die in sehr verschiedene Richtungen gehen. Für uns war Licht während der Akademie mit Erkenntnissen und mit Lichtblicken verbunden. Wir alle haben viel Neues gelernt und hatten oft wunderbare Erlebnisse, die sich in diesen Lichtblicken wiederfinden. Ein anderer Aspekt für uns war das Licht in Form einer Flamme, die uns während der gesamten Akademie begleitete, und die hoffentlich auch nach der Akademie in uns allen weiter brennen wird. Jeder der Teilnehmer weiß, dass es nicht die Kurse allein sind, die die einzigartige Akademieatmosphäre schaffen. Auch diesen Aspekt spiegelt das Licht wider. Kommt wie im Bild Licht verschiedener Farben zusammen, so entsteht etwas Neues: helles, weißes Licht.

Wir alle zusammen lassen das Akademielicht entstehen, und auch wenn wir dieses Licht nun wieder in seine Farben getrennt haben, so können wir euch mit Sicherheit garantieren: es findet auch wieder zusammen. Ihr habt während unserer Zeit in der Akademie Freundschaften geschlossen, Erlebnisse gehabt und Erkenntnisse gewonnen, die euch keiner mehr nehmen kann. Das Akademie-„Licht“ wird euch von nun an begleiten und euch vielleicht auch auf das ein oder andere Projekt aufmerksam machen. Geht mit offenen Augen durchs Leben und achtet auf neue Möglichkeiten, die sich euch auftun, und vor allem habt den Mut, diese auch wahrzunehmen.

Wir wünschen euch alles Liebe und Gute für das, was als nächstes auf euch zukommt, und wir freuen uns darauf, euch – in egal welchem Zusammenhang – wieder zu sehen, vielleicht ja sogar in zwei oder drei Jahren hier in Adelsheim.

Und nun wünschen wir euch viel Spaß beim Lesen und Schmökern!

Eure/Ihre Akademieleitung

Patricia Keppler

Patricia Keppler (Assistenz)

Wendelin Wiedemer

Wendelin Wiedemer (Assistenz)

Georg Wilke

Georg Wilke

Petra Zachmann

Dr. Petra Zachmann

Inhaltsverzeichnis

Kurs 4 – Fakten, Fakten, Fakten

Vorwort

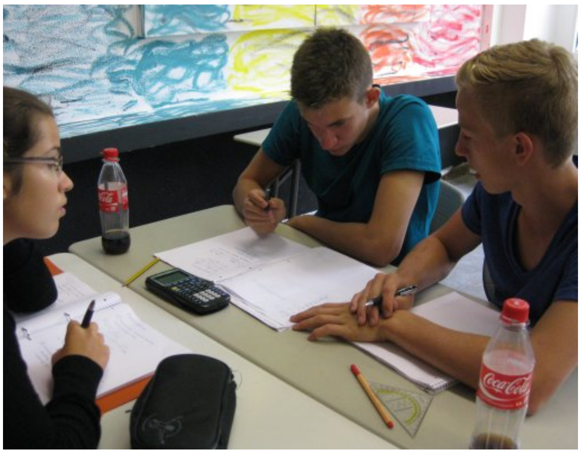
Alicia Rohnacher

Mathe in den Ferien? Und das freiwillig? Diese Fragen bekamen wohl einige Kursteilnehmer daheim zu hören, als sie sich für den Mathe-Kurs der Science Academy entschieden haben. Aber dass Mathe hier etwas ganz anderes als die Schulmathematik ist und auch richtig Spaß machen kann, haben die Teilnehmer schon sehr bald erfahren.

Am Eröffnungswochenende traf die bunte Mischung aus zwölf Schülerinnen und Schülern, zwei Kursleitern und einer Schülermentorin zum ersten Mal aufeinander, um zusammen die Welt der Statistik zu entdecken.

Schon nach dem ersten Kennenlernen wurden sie mit der wichtigsten Arbeitsmethode des Kurses, dem Diskutieren, konfrontiert. Was für den einen oder anderen erst ungewohnt war, führte im Laufe der Akademie zu heißen Debatten über statistische Probleme. So konnten die Teilnehmer neben den mathematischen Kenntnissen auch ihre rhetorischen Fähigkeiten verbessern.

Der Spaß kam dabei natürlich nicht zu kurz, vor allem, wenn die Diskussionsrunden durch verschiedenste Naschereien und leckeren Tee versüßt wurden. Und auch außerhalb der Kurszeiten hatte der Kurs jede Menge zu lachen. So toppten die Mathematiker beim Sportfest durch tollen Teamgeist und einen einfallsreichen Schlachtruf das Ergebnis vom Vorjahr und experimentierten beim Exkursionsbesuch in Heidelberg unter anderem mit viel Freude in der Explo-Ausstellung. Dass Mathematiker auch kreativ sind, bewiesen die Teilnehmer vor allem beim Entwerfen des Kurs-T-Shirts, das ganz unter dem Motto „Keine Angst vor wilden Formeln!“ stand.



Unser Kurs

Peter-Henrik Bareis war stets gutgelaunt und hatte ständig was zum Lachen, was wohl auch daran gelegen haben könnte, dass er eigentlich immer eine Cola bei sich hatte. Er war immer motiviert, freundlich und hilfsbereit und brachte uns in den Diskussionen oft zurück auf das Wesentliche. Beim Sportfest war er einer unserer Punktegaranten und man konnte sich immer auf ihn verlassen. Während der Abschlusspräsentation war er ziemlich gelassen und meisterte die Präsentation souverän.

Manuel Eppler „Ich hab das jetzt schon mal in den Taschenrechner eingegeben. . . !“ So hörten wir es während des Kurses öfters aus Manuels Ecke sagen, wenn es um langwierige Rechnungen ging. Er war nicht nur in Sachen GTR echt fit, sondern lieferte uns auch gute Beiträge in manchmals ausufernden Diskussionen. Und da er auch sonst immer gut drauf und für so manchen Spaß und nette Unterhaltungen zu haben war, kam es im Kurs zum ein oder anderen Lachflash, weil Manuel da seinen verrückten Ideen freien Lauf ließ.

Sarah Högerle war immer sehr ruhig, aber total nett zu allen. Sie hat immer motiviert mitgearbeitet und gute Beiträge geleistet. Mit vielen Denkanstößen brachte sie uns auf neue Ideen und übernahm bei der Präsentation auch gerne die eher schwierigen Teile. Ihre Begeisterung fürs Sportfest resultierte in vielen Punkten, die sie für unsere Gruppe erringen konnte. Sarah ist eine tolle Kurskameradin, die die Dinge ohne viel Aufhebens und in freundlicher Haltung angeht.

Miriam Kurtzhals war immer gutgelaunt und hilfsbereit. Unsere langen Diskussionen waren für sie nie mit einem „Das ist halt so!“ geklärt und so war sie erst zufrieden, wenn alle Fragen beantwortet waren. Das war eine große Bereicherung für unsere Diskussionen, zumal sie auch auf unsere Fragen immer eine Antwort parat hatte. Sowohl die Rotation als auch die Abschlusspräsentation waren für sie kein Problem. Außerdem leitete sie die Bibel-KüA und war mit großem Engagement in der Theater-KüA.

Iris Mahninger war über die Akademie eigentlich eine sehr ruhige Person, jedoch immer nett und auch hilfsbereit. Beim Sportfest war sie stets motiviert und setzte sich voll und ganz für uns, den Mathekurs, ein. In der KüA-Schiene engagierte sie sich vor allem in der Musik-KüA, was wir am Hausmusikabend in der Akademieband an ihrem Gitarrenspiel bestaunen konnten.

Stefan Möll war ein sehr netter Kurskamerad, der bei der Arbeit immer total interessiert war. Er stellte viele Fragen und war überhaupt sehr wissbegierig. Auch holte er uns aus endlosen, im Kreis gehenden Diskussionen mit seinen Einwürfen wieder auf den Boden der Tatsachen zurück und fokussierte uns auf das Wesentliche. Das war sehr wichtig, da wir dadurch im Kurs gut vorankamen. Beim Sportfest hat er uns durch Anfeuern und hilfreiche Tipps – sozusagen als Mannschaftscoach – sehr unterstützt.

Magdalena Neureither war während der Diskussionen häufig sehr ruhig, jedoch geistig immer bei der Sache. Ihre konstruktiven Beiträge und guten Fragen führten uns wieder auf die richtige Spur. In unseren Pausen war sie einer der Stammgäste der sehr beliebten Sofaecke. Ihre Person beschreibt man am besten als sehr freundlich und liebenswert. Bei der KüA-Schiene war sie für jede KüA zu haben, ihre Leidenschaft galt allerdings dem Chor.

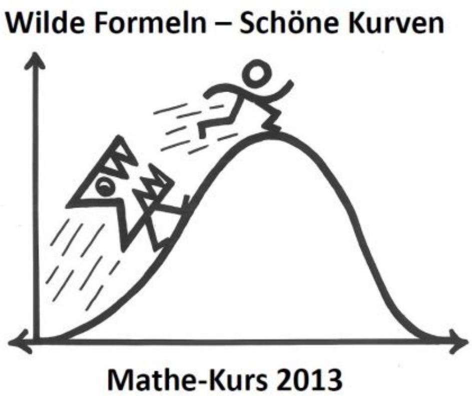
Caroline Pfannschmidt wohnte stets fröhlich und mit einer Tasse Kaffee in der Hand den Kurstreffen bei. Im Kurs lernten wir sie als hilfsbereit kennen. Sie half jeden Tag, die Tassen für den Kaffee und Tee aus der Mensa zu holen und brachte sie selbstverständlich wieder zurück. In der Zeit der KüAs fand man sie bei allen möglichen Angeboten, woran man ihre breit gefächerten Interessen sieht. Insgesamt ist sie eine sehr nette und in vielen Gebieten interessierte Person.

Tom Potthoff war einer unserer Mathematiker, der auf keinen Fall fehlen durfte. An den Diskussionen beteiligte sich Tom interessiert und brachte durch lustige Sprüche immer wieder Spaß und Lockerheit in unsere Truppe. Bei Proben des Präsentierens war Tom oft das Versuchskaninchen und man konnte sich viel bei ihm abschauen, da er sich sicher und gut präsentierte. Auch am Sportfest war Tom eine große Hilfe und nahm dafür, im wahrsten Sinne des Wortes, einiges „auf die Schulter“.

Simeon Schaub glänzte durch seine Programmierfähigkeiten am Computer und war immer hilfsbereit. Engagiert mischte er mit seinen schlagenden Argumenten mit und brachte uns auf so manche neue Idee. Ihn hatte unser Kursthema so gepackt, dass

er selbst beim Mittagessen noch etwas im Taschenrechner nachrechnete und uns mit neuen Programmen und Apps überraschte.

Timothy Schubert war ein sehr aufgeweckter Junge, der immer konzentriert bei der Sache war und die anderen Kursteilnehmer nicht selten durch seine pfiffigen Anmerkungen zum Nachdenken anregte. Besonders engagiert zeigte er sich auch, als es um unser Mathekurs-T-Shirt ging. Ihm verdanken wir die wirklich gelungene, lustige Karikatur darauf. In seiner Freizeit kämpfte er des Öfteren als Vertreter unseres Kurses an der Tischtennisplatte um den Sieg und fand im Anbieten einer Judo-KüA auch eine Möglichkeit, sein langjähriges Hobby hier einzubringen.



Jonathan Stockinger ist sehr kontaktfreudig und war immer gutgelaunt, hilfsbereit und freundlich. Da er sportlich ist, brachte er uns beim Sportfest, vor allen Dingen im Gummistiefelweitwurf, wichtige Punkte. Seine Ideen, die er im Kurs einbrachte, halfen uns oft in den Aufgaben weiter. Die Präsentationen waren für ihn kein Problem, bloß des mit dem hochdeidsch hod ned äwel so klabbt.

Unsere Kursleiter

Damián Gvirtz Damián war immer nett, hilfsbereit und gutgelaunt und erklärte uns mit seiner großen Begeisterung für die Mathematik und seinem argentinischen Temperament ausgiebig und spannend die Welt der Statistik. Als überzeugter Barfußläufer und talentierter Sing- und Tanzbär verbreitete er immer gute Laune und sorgte für gute Stimmung im Kurs.

Jochen Reder Jochen hat uns durch seine lockere und nette Art am Anfang des Kurses das Zusammenfinden in der Gruppe erleichtert. Durch seine Erfahrung als Lehrer wusste er, wie er uns unterstützen und auch schwerere Themen gut vermitteln konnte. Er half uns und machte uns immer wieder Mut, auch wenn wir uns im Kreis „drehten“ oder nicht gleich eine Lösung fanden.

Alicia Rohnacher Unsere Schülermentorin Alicia war für unterhaltsame Gespräche immer zu haben. Gleichzeitig war sie die Ansprechpartnerin bei Problemen aller Art und stand uns die ganze Zeit mit Rat und Tat zur Seite. Sie brachte uns mithilfe von Süßigkeiten durch den Tag, was wir alle sehr begrüßten. Durch ihre hervorragende Motivationsarbeit waren wir stets guter Laune. Deswegen mochten wir sie alle sehr gerne.

Einleitung

Damián Gvirtz, Jochen Reder

„Trau keiner Statistik!“, „Mit Statistik kannst Du alles belegen.“ In diesem Sommer wollten die Teilnehmer des Mathematikkurses, genauer des Statistikkurses, herausfinden, wie sicher man sein kann, wenn man eine statistische Erhebung auswertet.

Wahrscheinlichkeiten zu erkunden, ohne vorher Rezepte gelernt oder gar geübt zu haben, war am Eröffnungswochenende die erste große Herausforderung, der sich die Teilnehmer stellen mussten.

Wie findet man heraus, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass in einer Gruppe von 25 Personen zwei am gleichen Tag Geburtstag haben? Die Schätzungen reichten am ersten Abend von 5 Promille bis 70 Prozent und die Diskussion über den richtigen Lösungsweg dauerte bis zum Ende der ersten Kurssitzung an, ohne dass wir ein endgültiges Ergebnis hatten. Es gab verschiedene Lösungen und unterschiedliche Wege dorthin. Was war nun richtig? Am ersten Abend konnten wir es nicht abschließend klären und das war nicht einfach zu akzeptieren.

Dies war die erste Lektion! Wir sind nicht in der Schule, wo von der Lehrperson in der Regel recht zügig eine Methode vorgestellt wird, die man dann immer wieder auf passende Probleme anwendet.

Am nächsten Morgen die Überraschung: Wir bekamen von einem Teilnehmer eine einwandfreie Argumentation geliefert, dass die Wahrscheinlichkeit für zwei Geburtstagskinder am gleichen Tag bei fast 60 % liegt.

Nun war das Eis gebrochen, wir stiegen ein in die Fragestellungen der beurteilenden Statistik, erarbeiteten uns Begriffe wie Ablehnungsbereich, Fehler erster und zweiter Art, Wahrscheinlichkeitsverteilung, Binomialkoeffizienten und Binomialverteilung und schließlich auch Normalverteilung und Wahrscheinlichkeitsdichte.

Die Scheu vor komplizierten Formeln und komplexen Darstellungen wurde allmählich überwunden und wir konnten mit Computer und GTR unsere Auswertungen durchführen.

Wir führten einen Test mit allen Akademieteilnehmern durch und fanden heraus, dass wir auf hohem Signifikanzniveau behaupten können, dass man sein Zeitgefühl durch einfaches Training verbessern kann. Wir simulierten 100 Millionen Würfe mit 10 Würfeln und präsentierten unsere „wilden Formeln“ den Nichtmathematikern der diesjährigen Akademie und am Ende auch den Eltern und Gästen der Abschlussveranstaltung.

Geburtstagsproblem

Stefan Möll

Das Geburtstagsproblem hat, wie der Name schon sagt, mit Geburtstagen zu tun. Es geht darum, die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass mindestens 2 aus 25 zufällig ausgewählten Menschen am gleichen Tag Geburtstag haben.

Lösung:

Wir bestimmen zuerst die Gegenwahrscheinlichkeit, dass das Ereignis (2 aus 25 Personen haben am gleichen Tag Geburtstag) nicht stattfindet. Die erste Person hat 365 Tage zur Auswahl, um Geburtstag zu haben.
Der zweiten Person bleiben jetzt nur noch 364 Tage, um Geburtstag zu haben, weil wir ja nicht wollen, dass zwei am gleichen Tag Geburtstag haben.
Der dritten Person bleiben jetzt noch 363 Tage, um Geburtstag zu haben, weil wir ja wollen, dass auch die dritte Person an einem Tag alleine Geburtstag hat.
usw.
Die 25. Person hat nur noch 341 Tage frei, um Geburtstag zu haben.

$$\begin{aligned} P &= \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{342}{365} \cdot \frac{341}{365} \\ &\approx 0,4313\,(43,13\,\%) \end{aligned}$$

ist also die Wahrscheinlichkeit, dass 25 Personen an verschiedenen Tagen Geburtstag haben.

Die beiden Wahrscheinlichkeiten, dass alle an verschiedenen Tagen Geburtstag haben, bzw. mindestens zwei am gleichen Tag, müssen addiert 100 % ergeben. Wir ziehen davon die unerwünschten Fälle (alle an verschiedenen Tagen) ab.

$$\begin{aligned} &1\,(100\,\%) - 0,4313\,(43,13\,\%) \\ &= 0,5687\,(56,87\,\%) \end{aligned}$$

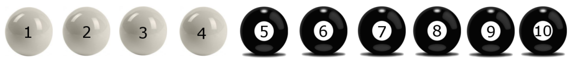
Das ist jetzt die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 2 aus 25 Personen am gleichen Tag Geburtstag haben. So einen hohen Wert erwarten die wenigsten. Daran sieht man, dass es sich lohnen kann, Wahrscheinlichkeiten zu berechnen, weil der erste Schein oft trügt.

Binomialkoeffizient

Caroline Pfannschmidt

Mit dem Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ (lies: n über k) kann man ausrechnen, auf wie viele verschiedene Arten man bei einem statistischen Experiment genau k „günstige“ Ergebnisse aus einer Menge von n Ergebnissen ziehen kann. Dabei können Ergebnisse weder zurückgelegt werden, noch spielt die Reihenfolge, in der die „günstigen“ bzw. „ungünstigen“ Ergebnisse gezogen werden, eine Rolle.

Genauer möchten wir den Binomialkoeffizienten jetzt anhand eines Beispiels erklären. Gegeben ist ein Sack mit 10 Kugeln, 6 schwarzen und 4 weißen, die durchnummeriert sind. Man



ziehe blind eine Kugel nach der anderen und lege sie alle in einer Reihe ab. Wenn man jetzt die Reihenfolge der Zahlen betrachtet, ist dieses Ereignis einmalig (Detailanordnung).

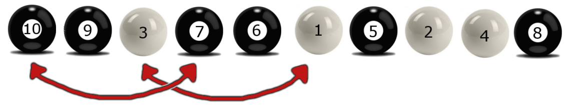
Bei 10 Kugeln kann man für die erste Kugel unter allen 10 Kugeln auswählen, für die zweite gibt es noch 9 Möglichkeiten usw. und bei der letzten Kugel hat man gar keine Auswahl mehr, also nur noch eine Möglichkeit. Die Anzahl der Detailanordnungen ist also

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 9 \cdot 10 = 3628800$$

Hierfür gibt es eine etwas kürzere Schreibweise, die Fakultät:

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

Wenn man sich jetzt allerdings nur für die Farbe der Kugeln interessiert, sehen alle Ereignisse, bei denen nur weiße bzw. schwarze Kugeln untereinander ausgetauscht werden, gleich aus (Farbreihenfolge). Es gibt 4! verschiedene An-



ordnungen, die gleich aussehen, wenn wir nur weiße Kugeln untereinander austauschen (es sind ja 4 weiße Kugeln), gleiches gilt für die schwarzen Kugeln, allerdings gibt es hier für eine Farbreihenfolge 6! verschiedene Detailanordnungen.

Damit wir keine Dopplungen haben, müssen wir jetzt also noch die Anzahl aller Detailanordnungen durch $4! \cdot 6!$ teilen, die Anzahl unterschiedlicher Farbreihenfolgen ist also

$$\frac{10!}{4!6!} = 210$$

Die allgemeine Formel sieht dann so aus:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

für n Ergebnisse und k „günstige“ Ergebnisse. Und auch für diese kompliziert aussehende Formel gibt es eine einfachere Schreibweise, man schreibt:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Diese Funktion kennt sogar der Taschenrechner. Man gibt dann ein: $n \to nCr$ (das ist die Funktion) $\to k$. Die englische Bezeichnung nCr steht für „from n choose r“.

Binomialverteilung

Iris Mahninger, Magdalena Neureither

Fangen wir mit einem Beispiel an: Wir haben einen Würfel und würfeln genau $n = 5$ Mal (n: Gesamtanzahl der Würfe). Nun wollen wir die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass wir bei genau $k = 2$ Versuchen (k: Anzahl der Erfolge) eine 6 würfeln. (Die Erfolgswahrscheinlichkeit p für die Zahl 6 bei einem Wurf beträgt $\frac{1}{6}$.) Im Beispiel gibt uns die Binomialverteilung dann an, mit welcher Wahrscheinlichkeit 2 Erfolge eintreten (zweimal eine 6 gewürfelt wird), wenn die Gesamtanzahl n der Versuche 5 ist und die Erfolgswahrscheinlichkeit p eines Versuchs $\frac{1}{6}$.

Bei Binomialverteilungen gibt es immer nur zwei mögliche Ergebnisse: richtig oder falsch, Erfolg oder Misserfolg, es wird eine 6 gewürfelt oder nicht.

Für ein Beispiel wie das oben bereits genannte, bei dem man die Wahrscheinlichkeit für genau k Treffer berechnet, können wir die Wahrscheinlichkeit mithilfe dieser Formel angeben (wobei X die beobachtete Anzahl an Erfolgen ist):

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Erklärung:

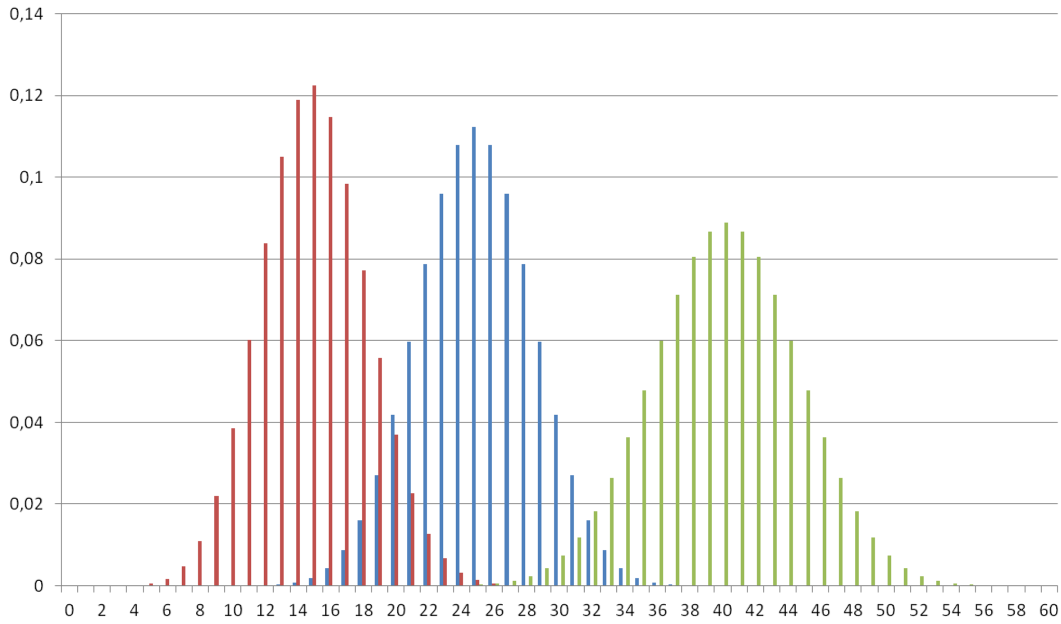
$p^k(1-p)^{n-k}$ (nach Vertauschen der Faktoren) gibt die Wahrscheinlichkeit jeder einzelnen Möglichkeit, k Erfolge zu erzielen, an. Im Baumdiagramm: Ein einzelner Pfad, der, nach unserem Beispiel, zwei Erfolge (also zweimal 6) bei insgesammt fünf Versuchen einschließt, hat die Wahrscheinlichkeit: $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}$ oder zusammengefasst: $\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3$. Und dies ist dasselbe wie:

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{5-2}$$

Den Ausdruck $\binom{n}{k}$ nennt man Binomialkoeffizienten. Er gibt, wie oben erklärt, die Anzahl der Möglichkeiten bei k Erfolgen von n Versuchen in einem statistischen Experiment an.

Bezug zum Beispiel:

$$\begin{aligned} n &= 5 \\ p &= \frac{1}{6} \\ k &= 2 \\ P(X = 2) &= \binom{5}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{5-2} \\ &\approx 0,1608 \end{aligned}$$



blau: $n = 50$, $p = 0,5$; rot: $n = 50$, $p = 0,3$; grün: $n = 80$, $p = 0,5$

Im Taschenrechner gibt es auch die Möglichkeit, den Befehl „binompdf(n, p, k)“ zu benutzen: binompdf(5,$\frac{1}{6}$,2)$\approx 0,1608$

Dieser Befehl berechnet die Wahrscheinlichkeit für genau 2 Treffer. Für die Wahrscheinlichkeit von höchstens k Treffern gibt es einen anderen Befehl: „binomcdf(n, p, k)“. Und für „mindestens k Treffer“ können wir dann einfach die Gegenwahrscheinlichkeit zu „binomcdf(n, p, k)“ verwenden, also 1-binomcdf($n, p, k-1$). Es muss beachtet werden, dass

$$P(X \geq k) = 1-P(X < k) = 1-P(X \leq k-1)$$

Die Formel für binomcdf(n, p, k) ist schlicht und einfach die Summe der darin enthaltenen Fälle:

$$\begin{aligned} P(X \leq k) =& P(X = 0) + P(X = 1) \\ &+ \cdots + P(X = k) \end{aligned}$$

In Kurzschreibweise:

$$\begin{aligned} P(X \leq k) &= \sum_{i=0}^{k} P(X = i) \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \end{aligned}$$

$\sum$ (Summenzeichen) summiert die dahinterstehende Formel für alle i von 0 bis k.

Wir können nun sagen, dass die Wahrscheinlichkeit, bei 5-maligem Werfen eines Würfels genau zweimal eine 6 zu bekommen, ca. 16,08 % beträgt. Dies ist nun die Wahrscheinlichkeit für genau einen Wert k. In einem Diagramm kann man aber gleich für alle unterschiedlichen k die Wahrscheinlichkeit ablesen.

Mit Hilfe von Programmen wie zum Beispiel Microsoft Office Excel haben wir Binomialverteilungen am Computer grafisch durch Säulendiagramme dargestellt (siehe obige Abbildung).

Wir haben gegeben n (die Gesamtanzahl) und p (die Wahrscheinlichkeit). An der x-Achse kann man k ablesen und auf der y-Achse die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis. Dadurch, dass die Wahrscheinlichkeit hier bei $0,5$ liegt, ist die Kurve symmetrisch (blaues Diagramm). Wenn n größer wird (grünes Diagramm), werden die Wahrscheinlichkeiten kleiner und wenn n kleiner wird, werden die Wahrscheinlichkeiten größer. Addiert man die Werte aller Säulen zusammen, kommt man auf 1 (die Wahrscheinlichkeit aller möglichen Ausgänge).

Liegt die Wahrscheinlichkeit bei kleiner als 0,5, liegen die Säulen weiter links im Koordinatensystem (rotes Diagramm), weil weniger Erfolge als bei 0,5 erwartet werden. Ist die Wahrscheinlichkeit größer als 0,5, liegen die Säulen dann weiter rechts im Koordinatensystem.

Philosophie des Testens

Iris Mahninger, Magdalena Neureither

Man stelle sich folgendes Beispiel vor: *Wir wollen herausfinden, ob der Wurf einer bestimmten Münze unfair ist.*

Dazu stellen wir zwei Hypothesen auf:

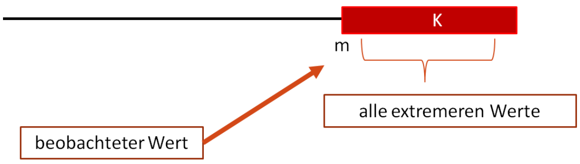
H_0: Nullhypothese
H_1: Alternativhypothese

An unserem Beispiel:

H_0: $P(\text{Kopf}) = 50\,\%$ (die Münze ist fair)
H_1: $P(\text{Kopf}) \neq 50\,\%$ (die Münze ist unfair)

Wir wählen immer H_0 als die Hypothese, die wir verwerfen wollen. Bei diesem Beispiel wollen wir also ausschließen, dass die Münze fair ist.
H_0 und H_1 schließen sich gegenseitig aus.

Um nun zu einem Ergebnis zu kommen, setzen wir ein kritisches Gebiet K am beobachteten Wert an. Es schließt den beobachteten Wert m und alle im Sinne der Nullhypothese extremeren Werte mit ein. Wir versuchen also, die Grenze, ab der wir H_0 verwerfen, so zu setzen, dass unsere Beobachtung in K liegt, d. h. gegen H_0 spricht.

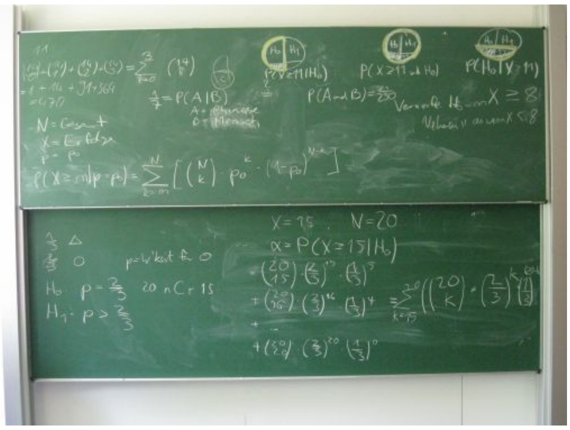


Mit dem kritischen Gebiet wird berechnet, mit welcher Wahrscheinlichkeit wir den Fehler begehen, dass wir H_0 verwerfen, obwohl die Hypothese wahr ist. Diesen Fehler nennt man Alpha-Fehler (α). Außerdem gibt es noch den Fehler β, der die Wahrscheinlichkeit angibt, dass H_0 angenommen wird, obwohl sie falsch ist (Tabelle auf der nächsten Seite).

In der Anwendung ist der Alphafehler wichtiger, weil die Hypothesen so aufgestellt werden, dass H_0 verworfen werden soll. In einer mathematischen Formel ausgedrückt gilt:

$$\alpha = P(X \in K | H_0)$$

α ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Beobachtung in das kritische Gebiet fällt unter der Bedingung, dass H_0 gilt. Wenn α sehr klein ist, können wir vermuten, dass H_0 falsch ist, weil es sehr unwahrscheinlich ist, dass, falls H_0 gilt, dieses Ergebnis oder ein extremeres erscheint. Je nach Studie akzeptieren wir H_0 bis zu einem unterschiedlichen α. Z. B. sind 5 % bei einer Medikamentenstudie ein viel zu hohes α, bei anderen Versuchen können auch Werte knapp unter 5 % ausreichend sein, um H_0 zu verwerfen.



Mit α kann man nicht auf die Wahrscheinlichkeiten der Hypothesen schließen, da es sich hier um eine sogenannte *bedingte Wahrscheinlichkeit* handelt. Wir nehmen nämlich bei der Berechnung von α im Voraus schon an, dass H_0 wahr ist.

$$P(X \in K | H_0) \neq P(H_0 | X \in K)$$

Die Formel sagt aus, dass bei einer bedingten Wahrscheinlichkeit das Ergebnis und die Bedingung im Allgemeinen nicht vertauscht werden können. An einem Beispiel mit Hund und Terrier kann man dies gut klarmachen: Die Wahrscheinlichkeit, dass mein Haustier ein Hund ist unter der Bedingung, dass es ein Terrier ist, beträgt 1. Die Wahrscheinlichkeit jedoch, dass mein Haustier ein Terrier ist, unter der Bedingung, dass es ein Hund ist, ist nicht 1, da nicht alle Hunde Terrier sind.

Es gibt auch andere Methoden, mit denen man die Wahrscheinlichkeit der Hypothesen berechnen kann (Bayes-Statistik). Dazu benötigen wir jedoch eine Anfangsvermutung, die nicht von vorneherein klar ersichtlich ist. Dieses Verfahren zusätzlich genauer anzuschauen, wäre

	H_0 ist wahr	H_1 ist wahr
H_0 wird verworfen	α (Fehler 1. Art)	Entscheidung richtig
H_0 wird nicht verworfen	Entscheidung richtig	β (Fehler 2. Art)

Fehlerarten in der Übersicht

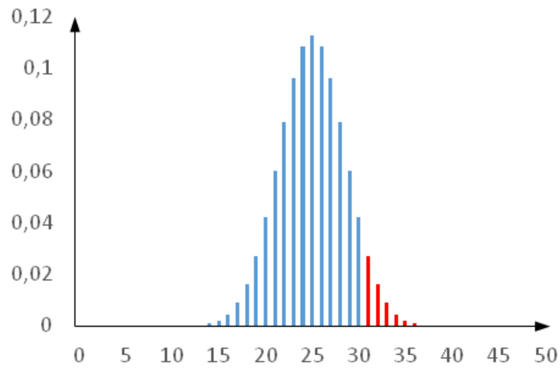
im Rahmen der zweiwöchigen Akademie nicht möglich gewesen.

Binomialtests

Peter-Henrik Bareis

Ein Binomialtest ist ein mehrstufiges Zufallsexperiment mit je zwei möglichen Ergebnissen, nämlich Erfolg oder Misserfolg. Da die einzelnen Versuche unabhängig voneinander sind, ist der Binomialtest mit beliebig oft wiederholten Versuchen durchführbar. Die gesamte Versuchsreihe ist binomialverteilt.

Einseitige Tests



Am Eröffnungswochenende führten wir im Plenum ein Experiment mit allen anwesenden Teilnehmern durch: Dazu sollten alle die Augen schließen und eine Minute abschätzen, während eine Stoppuhr lief. Wer meinte, die Minute sei um, sollte die Augen öffnen und sich die Zeit auf der Stoppuhr merken. Danach wurde das Experiment wiederholt und alle, die beim zweiten Mal besser geschätzt hatten als vorher, sollten sich melden. Bei der Durchführung des Experiments wusste keiner der Teilnehmer, worum es dabei ging. Von den insgesamt 93 Teilnehmern hatten sich 70 verbessert.

Nun haben wir uns die Frage gestellt, wie sicher man sagen kann, dass man sich beim zweiten Versuch verbessert, oder ob es nur Zufall war.

$p :=$ Wahrscheinlichkeit einer Verbesserung
H_0: $p \leq 50\,\%$ (es ist zufällig oder unwahrscheinlicher)
H_1: $p > 50\,\%$ (es ist wahrscheinlicher)

Gesamtzahl Testpersonen: 93
Verbesserte Schätzungen: 70

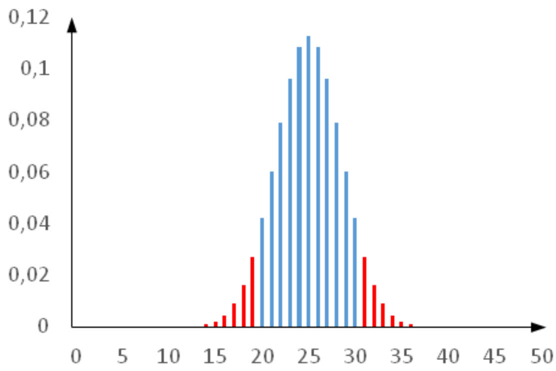
Wir setzten also das kritische Gebiet von 70 bis 93 und errechnen die Wahrscheinlichkeit, dass ein Wert hier hinein fällt, wenn H_0 gilt. Dies ist dann der α-Fehler.

$$\alpha = \sum_{i=70}^{93} \binom{93}{70} 0,5^i (1-0,5)^{90-i} \approx 0,00005\,\%$$

Das bedeutet, dass wir, wenn wir H_0 verwerfen, eine Fehlerwahrscheinlichkeit von 0,00005 % haben. Da diese Fehlerwahrscheilichkeit sehr klein ist, ist es offensichtlich, dass man sich verbessert.

Dies war ein einseitiger Test, da wir das kritische Gebiet auf nur einer Seite angesetzt haben.

Zweiseitige Tests



Es gibt außerdem noch zweiseitige Tests, bei denen das kritische Gebiet über beide Seiten verteilt ist.

Ein Beispiel für einen zweiseitigen Test wäre: Ein Zeitungshändler müsste wöchentlich 100 Zeitungen verkaufen, die er bisher immer sonntags verkauft hat. Allerdings wurden immer nur die Hälfte aller Zeitungen an den Mann gebracht. *Nun will er wissen, ob sich etwas ändert, wenn er die Zeitungen montags verkauft*, was er in der folgenden Woche testet: Er verkauft 45 Zeitungen.

$H_0 : p = 50\,\%$ (es ändert sich nichts)
$H_1 : p \neq 50\,\%$ (er verkauft mehr oder weniger)

Montags angeboten: 100
Davon verkauft: 45

Unser kritisches Gebiet umfasst 0-45 und 55-100, weil wir das kritische Gebiet bei dem beobachteten Wert und allen extremeren im Sinne der Nullhypothese ansetzen müssen.

$$\begin{aligned}\alpha =& \sum_{i=0}^{45} \binom{100}{i} 0,5^i (1-0,5)^{100-i} \\ &+ \sum_{i=55}^{100} \binom{100}{i} 0,5^i (1-0,5)^{100-i} \\ \approx& 36,8\,\%\end{aligned}$$

Bei Verwerfen von H_0 haben wir also eine Fehlerwahrscheinlichkeit von 36,8 %. Dieser Wert ist zu hoch, um H_0 zu verwerfen, deswegen kann der Verkäufer auch sonntags Zeitungen weiterverkaufen.

Exakter Test nach Fisher

Sarah Högerle, Timothy Schubert

Wir haben verschiedene Tests für unterschiedliche Situationen kennengelernt. Einer davon war der „exakte Test von Fisher“, den wir anhand einer Medikamentenstudie bearbeitet haben. Hierbei geht es um ein neues Medikament für eine schlimme Krankheit, das auf seine Wirksamkeit getestet werden soll.

Ist das neue Medikament B wirklich besser als ein bisher angewandtes Medikament A?

Um diese Frage beantworten zu können, wird ein Versuch mit 15 von der Krankheit betroffenen Patienten durchgeführt. Die Versuchsergebnisse konnten wir in folgender Tabelle ablesen:

	gestorben	überlebt	Summe
Mittel A	2	6	8
Mittel B	4	3	7
Summe	6	9	15

Dieser Tabelle kann man entnehmen, dass 8 Leuten das Mittel A verabreicht wurde und 7 Leuten das Mittel B. Insgesamt sind bei diesem Versuch 6 Patienten ums Leben gekommen, die restlichen 9 haben überlebt. Betrachtet man die beobachteten Werte für die einzelnen Medikamente, so stellt man fest, dass die Sterberate bei Medikament A „nur“ bei 25 % liegt, während die Sterberate bei Medikament B ungefähr 57 % beträgt. Für viele mag es nun eindeutig sein, dass Medikament A das bessere Mittel ist.

Doch wir wollen wissen, wie sicher man sich sein kann und ob man sich überhaupt sicher sein kann. Deshalb stellt man zwei Hypothesen auf. Die Hypothese H_0 besagt, dass das Medikament A nicht besser oder maximal gleich gut ist wie Medikament B. Die Gegenhypothese H_1 besagt, dass das Medikament A besser ist als das Medikament B. Unser Ziel ist es immer, die Hypothese 0 zu verwerfen und die Hypothese 1 mit einer geringen Fehlerwahrscheinlichkeit annehmen zu können. Deshalb berechnet man jetzt das Signifikanzniveau α, unsere Fehlerwahrscheinlichkeit.

Wir können mit dem Extremfall unserer Nullhypothese, die Mittel seien gleich gut, d.h. 6 Patienten sterben unabhängig vom Mittel, rechnen, da uns die maximale Fehlerwahrscheinlichkeit interessiert. Wäre Mittel A nämlich sogar schlechter als Mittel B, würde unser Signifikanzniveau kleiner werden.

Wir berechnen jetzt also das Signifikanzniveau für die Wahrscheinlichkeit, dass es 2 oder weniger Tote bei Mittel A gibt, unter der Voraussetzung, dass beide Mittel gleich gut sind. Zuerst berechnen wir die Wahrscheinlichkeit für unseren beobachteten Wert. Diese können wir mit folgendem Term berechnen:

$$\frac{\binom{6}{2}\binom{9}{6}}{\binom{15}{8}}$$

$\binom{6}{2}$ steht für den Fall, dass von 6 Toten zufällig 2 auf das Mittel A fallen. Dieser Rechenausdruck wird mit dem Fall, dass von 9 Überlebenden zufällig 6 auf Mittel A fallen, multipliziert. Dieses Ergebnis wird durch $\binom{15}{8}$ geteilt, das sind alle Möglichkeiten, aus den 15 Probanden 8 auszuwählen, die Mittel A bekommen. In mathematischer Fachsprache wird diese Verteilung auch als hypergeometrisch bezeichnet.

Im nächsten Schritt müssen wir alle extremeren Fälle berechnen, da wir ja die Wahrscheinlichkeit von 2 oder weniger Toten bei Mittel A berechnen wollen, unter der Voraussetzung, dass beide Mittel gleich gut sind. Die Terme und die dazugehörigen Vierfeldertafeln sind hier zu sehen:

	gestorben	überlebt	Summe
Mittel A	0	8	8
Mittel B	6	1	7
Summe	6	9	15

	gestorben	überlebt	Summe
Mittel A	1	7	8
Mittel B	5	2	7
Summe	6	9	15

	gestorben	überlebt	Summe
Mittel A	2	6	8
Mittel B	4	3	7
Summe	6	9	15

$$\begin{aligned}\alpha &= P(\leq 2\,\text{Tote bei A}|\text{A und B gleich gut})\\ &= \frac{\binom{6}{0}\binom{9}{8}}{\binom{15}{8}} + \frac{\binom{6}{1}\binom{9}{7}}{\binom{15}{8}} + \frac{\binom{6}{2}\binom{9}{6}}{\binom{15}{8}}\\ &= \frac{3}{13} \approx 23\,\%\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit für 2 Tote bei Mittel A, die Wahrscheinlichkeit für 1 Toten bei Mittel A und die extreme Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle, die Mittel A genommen haben, überlebt haben, ergeben unter der Annahme H_0 im schlimmsten Fall 23 %.

Was sagt uns diese Prozentzahl nun? Sie sagt uns, dass wir, wenn wir H_0 verwerfen, mit einer Fehlerwahrscheinlichkeit von 23 % rechnen müssen. Das heißt, wir würden, selbst wenn die Mittel gleich gut sind, trotzdem noch in fast jedem vierten Fall unser Ergebnis oder ein extremeres beobachten. Unsere Beobachtung ist also entgegen der ersten Vermutung nicht extrem genug, um H_0 auszuschließen.

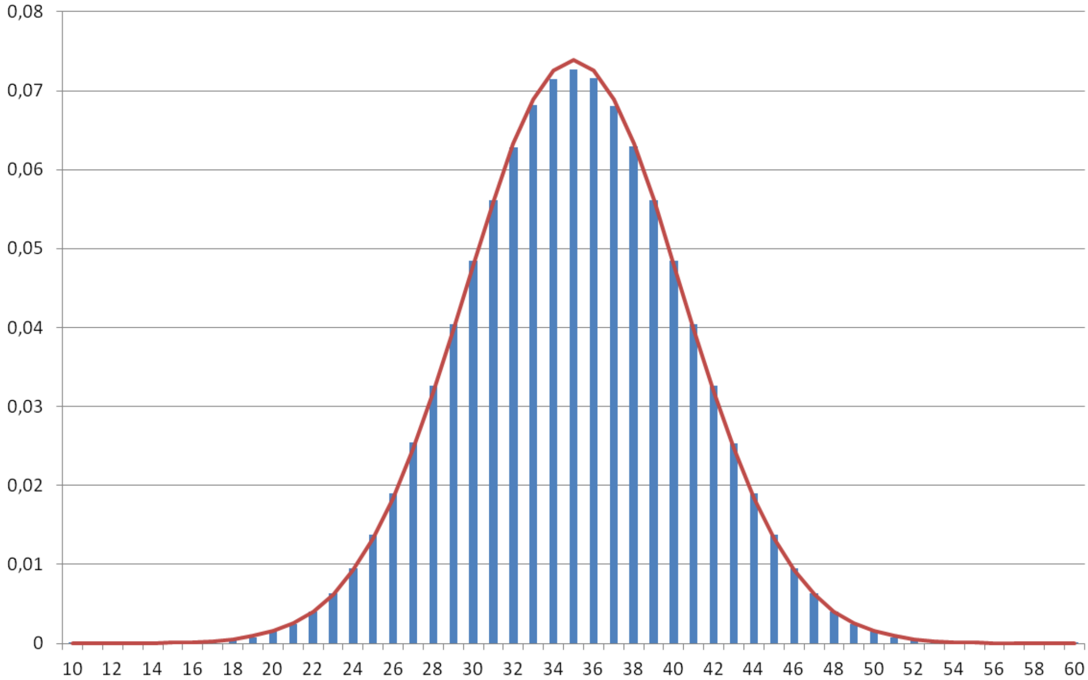
Normalverteilung als Grenzfall diskreter Verteilungen

Simeon Schaub

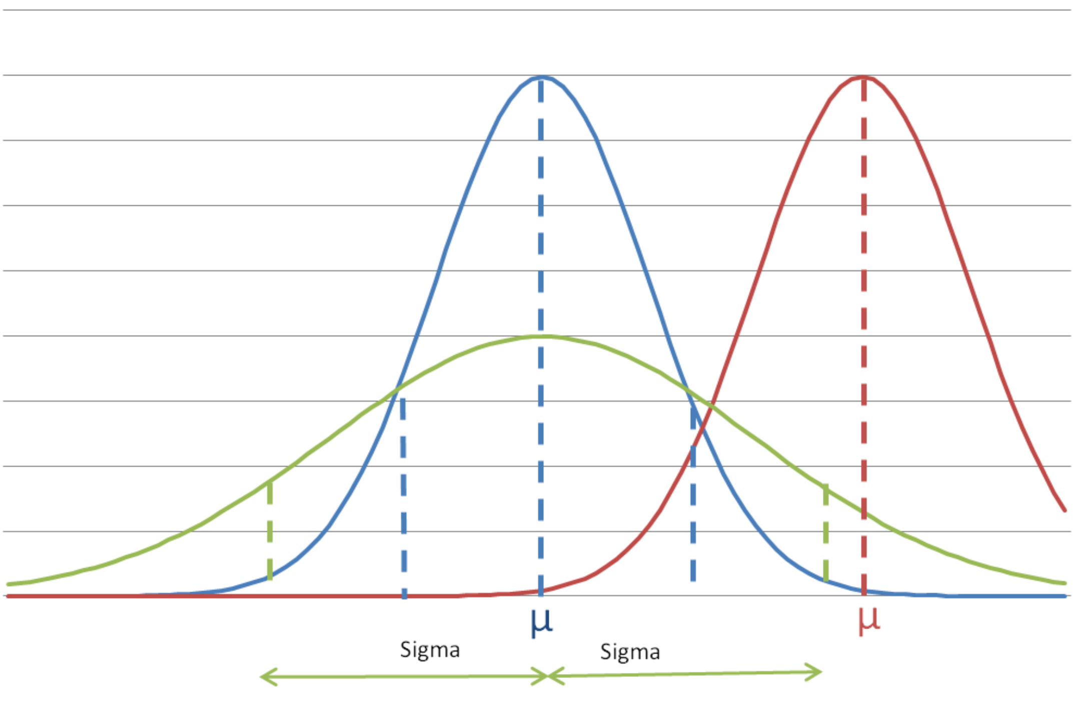
QR-Code zu Simeons „Würfelapp“ für das Smartphone

Am Anfang haben wir uns gefragt, mit welcher Wahrscheinlichkeit zum Beispiel das Werfen von sechs Würfeln eine bestimmte Gesamtaugensumme ergibt. Dazu haben wir verschiedene Versuche gemacht und unter anderem 6 Würfel 300 Mal geworfenen und immer die Gesamtaugensumme notiert. Um noch aussagekräftigere Ergebnisse zu bekommen, haben wir das Ganze mit 10 Würfeln, die 100 Millionen Mal geworfen werden, am PC simuliert und uns die Häufigkeit jedes Ereignisses ausgeben lassen.

Diese Daten haben wir uns dann von Excel in ein Diagramm zeichnen lassen (obere Abbildung auf der nächsten Seite). Wie wir hier sehr gut erkennen können, ähnelt diese Verteilung stark der der Binomialverteilung für große n. Jedoch fanden wir heraus, dass dies keine



Relative Häufigkeiten der Augensummen von 10 Würfeln bei 100 Mio. Versuchen; einhüllende Normalverteilung



Normalverteilung und ihre Parameter

Binomialverteilung war, da es bei einer Binomialverteilung immer nur 2 Ergebnisse gibt (zum Beispiel wahr oder falsch), wir aber hier 6 Ergebnisse pro Würfel hatten. Es scheint aber, dass sich sowohl diese Verteilung als auch die Binomialverteilungen für große n in ihrer Form durch eine Glockenkurve darstellen lassen.

Diese Verteilung nennt man die Normalverteilung. Sie nimmt Werte für alle reellen Zahlen an, nicht nur für natürliche. Als Parameter haben wir nun nicht mehr die Anzahl der Ergebnisse n und die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses p, sondern den Mittelwert μ und unseren „Streckfaktor“ σ, die sogenannte Standardabweichung. Die Funktionsgleichung dieser Verteilung ist nun auch um einiges komplizierter, nämlich:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Eine Veränderung von μ verschiebt lediglich den Graphen auf der x-Achse. Eine Vergrößerung von σ bewirkt, dass die Kurve gestreckt und deutlich flacher wird. Der Einfachheit halber haben wir dies meistens vom GTR oder vom PC mit einer vordefinierten Funktion berechnen lassen (untere Abbildung auf der vorherigen Seite).

Legt man nun die Normalverteilungskurve von Excel über unsere Versuchsergebnisse, so sieht man, dass es bei 300 Würfen relativ hohe Abweichungen gab, bei unserer Computersimulation konnten wir die Abweichungen mit dem bloßen Auge nicht erkennen.

Parameter der Normalverteilung

Tom Potthoff, Jonathan Stockinger

Wie bereits erwähnt, hat die Normalverteilung zwei Parameter, den Mittelwert μ und die Standardabweichung σ. Der Mittelwert μ ist der Durchschnitt aller Messwerte, also berechnet man ihn wie folgt:

$$\mu = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Die Standardabweichung σ gibt an, wie weit die Messergebnisse um den Mittelwert μ streuen. Zuerst haben wir uns überlegt, dass wir einfach immer die Differenz unserer Messwerte zum Mittelwert aufsummieren und durch n teilen, um die durchschnittliche Differenz aller Werte zum Mittelwert zu bekommen:

$$\frac{(x_1 - \mu) + (x_2 - \mu) + \cdots + (x_n - \mu)}{n}$$

Hier taucht nun aber das Problem auf, dass diese Differenz negativ ist, wenn μ größer als x ist und sich negative und positive Differenzen aufheben! Daher haben wir die Differenzen immer quadriert:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \mu)^2 + (x_2 - \mu)^2 + \cdots + (x_n - \mu)^2}{n}$$

Dies hatte den zusätzlichen Effekt, dass größere Abweichungen mehr ins Gewicht fallen. In der Regel weichen unsere aus den gemessenen Werten berechneten Parameter natürlich von den tatsächlichen Parametern ab, doch je größer unser n ist, desto mehr gleichen sich μ und σ dem tatsächlichen Wert an.

Links und rechts des Mittelwertes liegt das σ-Intervall.

In diesem Bereich des Graphen, also $\mu - \sigma$ bis $\mu + \sigma$, liegen ca. 68,27 % aller möglichen Ergebnisse.
Im 2σ-Intervall vom Mittelwert sind ca. 95,45 % aller Messwerte zu finden.
Im 3σ-Intervall vom Mittelwert sind ca. 99,73 % aller Messwerte zu finden.

Die Normalverteilung als die Wahrscheinlichkeitsdichte einer kontinuierlichen Verteilung

Tom Potthoff, Jonathan Stockinger

Bisher hatten wir die Normalverteilung nur als Grenzfall einer diskreten Verteilung, also einer Verteilung, bei der die Werte nur bestimmte Zahlen annehmen dürfen. Z. B. 1; 2; 3 oder 1; 1,5 ; 2 ; 2,5. Nun wollen wir die Normalverteilung als Verteilung einer fortlaufenden Größe ohne bestimmte Abstände der möglichen Ergebnisse, z. B. der Körpergröße, untersuchen.

Hier sind alle reellen Zahlen möglich (natürlich nur theoretisch). Aber selbst in einem realistischen Intervall, z. B. von 1,5–2,2, haben wir unendlich viele Werte.

Da alle reellen Zahlen möglich sind, haben wir unendlich viele x-Werte unter unserer Glockenkurve. Würde man jetzt von jedem die vermeintliche Wahrscheinlichkeit auf der y-Achse ablesen, so ginge die Gesamtwahrscheinlichkeit ja auch gegen unendlich und damit höher als 1, was nicht geht, da man keine Wahrscheinlichkeit >100 % haben kann. Also kann man die Wahrscheinlichkeit nicht einfach an der y-Achse ablesen. Ein weiteres Indiz: Hat man nun ein ganz kleines σ von z. B. 0,01 und setzt dieses in unsere Funktionsgleichung ein, so haben wir auch ein Ergebnis von >1. Das heißt, der Hochpunkt der Kurve liegt über 1.

Die y-Werte bezeichnen die Wahrscheinlichkeitsdichte, also die Wahrscheinlichkeit pro x-Intervall (Wahrscheinlichkeit/x-Intervall). Um die Wahrscheinlichkeit für dieses Intervall zu erhalten, muss man die durchschnittliche Wahrscheinlichkeitsdichte nun mit der x-Intervall-Länge multiplizieren und erhält damit den Flächeninhalt unter der Kurve im x-Intervall.

Die Wahrscheinlichkeit für ein Intervall erhält man also, indem man den Flächeninhalt unter der Kurve in diesem Intervall berechnet.

Man kann es sich aber auch noch anders erklären:

Wenn wir unsere Normalverteilung in einzelne gleichgroße Intervalle zusammenfassen, erhalten wir eine diskrete Verteilung mit Säulen der Breite 1, bei der man die Wahrscheinlichkeit wieder an der y-Achse ablesen kann. Hier erkennen wir, dass die Wahrscheinlichkeit für ein Intervall dem Flächeninhalt der entsprechenden Säule entspricht.

Ein Beispiel: Wir lesen ab: 30 %. Flächeninhalt: $30\,\% \cdot 1 = 30\,\%$. Sind unsere Säulen nun nur halb so breit, kann die Rechnung entweder so

$$30\,\% \cdot 0,5 + 30\,\% \cdot 0,5 = 15\,\% + 15\,\% = 30\,\%$$

oder auch so

$$32\,\% \cdot 0,5 + 28\,\% \cdot 0,5 = 16\,\% + 14\,\% = 30\,\%$$

lauten, je nachdem wie sich die Gesamtwahrscheinlichkeit des Ursprungintervalls auf die neuen Intervalle aufteilt. Man kann die Säulen also beliebig verfeinern, der Flächeninhalt aber gibt immer die Wahrscheinlichkeit an. Letztlich können wir auch bei der Normalverteilung als Kurve die Wahrscheinlichkeit für ein selbst gewähltes Intervall über den Flächeninhalt berechnen.

Der Flächeninhalt unter der gesamten Kurve beträgt 1, da dies gleichzeitig die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass irgendein Ereignis geschieht, was immer der Fall ist.

Es gibt auch andere kontinuierliche Verteilungen. Die Normalverteilung hat aber insofern eine zentrale Rolle, als ihre Kurve bei vielen gestreuten Größen in der Natur auftritt.

Gauß-Test

Manuel Eppler, Miriam Kurtzhals

Hierzu haben wir uns folgendes Beispiel angeschaut:

Der Besitzer einer Schokoladenfabrik behauptet, dass seine Schokoladentafeln durchschnittlich 100 g *wiegen.*

Wir wollten nun mithilfe der Mathematik herausfinden, ob die Aussage des Schokoladenherstellers der Wahrheit entspricht. Aus einer

Stichprobe von 10 Schokoladentafeln errechneten wir ein Durchschnittsgewicht von 100,141 g. Außerdem hatten wir die Information, dass seine Abfüllmaschinen mit einer Standardabweichung von 1g arbeiten. Wir nahmen weiterhin an, dass die Gewichte der Tafeln normalverteilt sind.

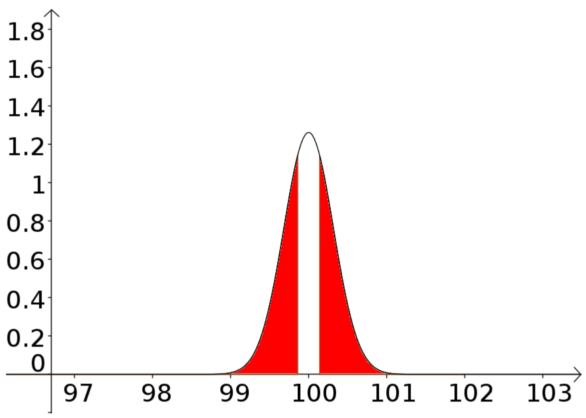
Wie bei den Binomialtests stellten wir nun zwei Hypothesen auf:

H_0: $\mu = 100\,\mathrm{g}$
H_1: $\mu \neq 100\,\mathrm{g}$

Was wir suchten, war das Signifikanzniveau

$$\alpha = P(x = 100,141\,\text{oder extremer}|\mu = 100)$$

Da unsere Hypothesen mit = / ≠ formuliert waren, mussten wir zweiseitig testen. In unserem kritischen Gebiet lagen also sowohl alle Werte ≥ 100,141, als auch alle Werte im selben Bereich achsensymmetrisch zu unserem unter H_0 angenommenen $\mu = 100\,\mathrm{g}$, also $\leq 99,859$.



Damit hätten wir mit dem kritischen Gebiet, mit μ und mit σ eigentlich alle Werte, die zur Berechnung mit dem GTR nötig sind. Allerdings benötigten wir für das σ einen neuen, kleineren Wert, weil wir erwarteten, dass die Standardabweichung von Durchschnittswerten, wie in unserem Fall, geringer ist als die von Einzelwerten, wie die hier angegebene Standardabweichung der Abfüllmaschinen. Der genaue Wert des σ der Durchschnittswerte $\sigma_{\overline{x}}$ berechnet sich durch folgende Formel:

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

In unserem Fall betrug die Gesamtzahl der Versuche $n = 10$, womit unser neues σ nach dieser Formel nun den Wert $\frac{1}{\sqrt{10}}$ annahm. Durch die Eingabe in den GTR: normcdf (99.859, 100.141, 100, $\frac{1}{\sqrt{10}}$) erhielten wir die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unser x-Wert unter der Annahme von H_0, also $\mu = 100$, bei einem σ von $\frac{1}{\sqrt{10}}$ zwischen 99,859 und 100,141 liegt.

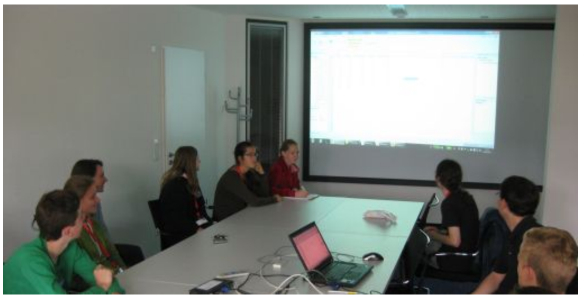
Da wir aber genau die Wahrscheinlichkeit des gegenteiligen Falls wollen, nämlich, dass der x-Wert unter diesen Gegebenheiten ins kritische Gebiet fällt, also einen Wert $\leq 99,859$ oder $\geq 100,141$ annimmt, mussten wir unser erhaltenes Ergebnis noch von der Gesamtwahrscheinlichkeit aller Ergebnisse, die immer 100 % beträgt, subtrahieren.

Somit bekamen wir als Endergebnis eine Wahrscheinlichkeit von $\approx 66,7\,\%$. Leider mussten wir feststellen, dass dieses Ergebnis uns weder eine große statistische Sicherheit für die Annahme von H_0, noch für deren Verwerfung bot. In solchen Fällen, in welchen man kein sogenanntes signifikantes Ergebnis erhält, besteht zum Beispiel die Möglichkeit, den Versuch mit einer größeren Stichprobe zu wiederholen.

Exkursion ans DKFZ

Caroline Pfannschmidt, Timothy Schubert

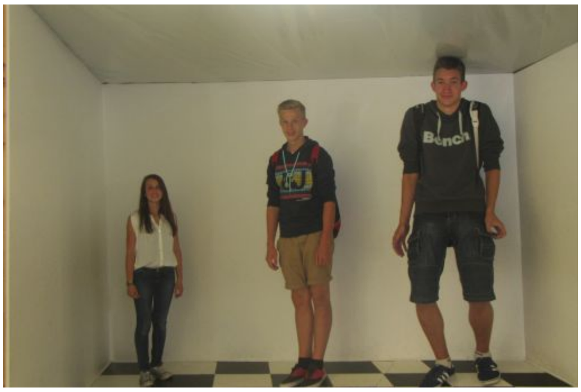
Am Montag, den 2.9.2013, trafen sich alle Mathekursler um halb neun an der Bushaltestelle. Zusammen mit dem Physik- und dem Astronomiekurs fuhren wir nach Heidelberg, wo wir an verschiedenen Stellen abgesetzt wurden. Unser Ziel war das DKFZ (Deutsches Krebsforschungszentrum) auf dem Unigelände (es gehört aber nicht zur Universität), wo wir einen Biostatistiker treffen sollten. Im Gebäude TP3 trafen wir im obersten Stockwerk Tim Holland-Lutz und Diana Tichy und sprachen ca. zwei Stunden miteinander. An dieser Stelle ihnen ein herzliches Dankeschön, dass sie sich die Zeit genommen haben.



Sie erzählten uns viel über ihre Arbeit und Methoden und führten uns auch verschiedene Programme vor, die sie in ihrer Arbeit benutzen. Dabei kam auch der uns schon bekannte Fisher-Test vor. Außerdem erklärten sie uns, wie Krebs entsteht und an welchen Medikamenten geforscht wird, und wie diese Medikamente dann erst an Tieren (meistens Mäusen) und später auch an Menschen getestet werden. Wir erfuhren, dass es von der Entdeckung eines Wirkstoffes bis zu seinem Einsatz bei Patienten mehrere Jahrzehnte dauern kann!

Wir durften viele Fragen stellen, die uns immer ausführlich beantwortet wurden. Nebenbei lernten wir noch ein bisschen was zur Biologie – Zellaufbau und DNA.

Da im gleichen Gebäude das *Heidelberger Life-Science Lab* ist, zeigten uns Jochen und Damián die Räumlichkeiten, in denen unsere beiden Kursleiter mitarbeiten und mitwirken. Wir besichtigten zwei Arbeitsräume und den Besprechungsraum (hier finden auch die Bewerbungsvorträge statt, außerdem dient der Raum als kleine Bibliothek), wo wir viel über das Lab und seine Aktivitäten erfuhren.



Nach einer Mittagspause im Hof gingen wir noch ins Explo, eine Art Mitmachausstellung, bei der es um physikalische Phänomene ging: Es gab optische Täuschungen, Spiegelkabinette, Lampen, die mit verschiedenen Edelgasen gefüllt waren und deren Spektrum wir mit Hilfe von speziellen Brillen sehen konnten, Experimente zur Schwerkraft und noch viel, viel mehr. Es war wirklich toll, alles einmal ausprobieren zu können.

Allerdings verbrachten wir dort dann so viel Zeit, dass wir uns auf dem Rückweg zum Bus richtig sputen mussten, weil wir noch ein ganzes Stück am Neckar entlang zu laufen hatten. Dabei konnte man sich aber noch mal sehr schön Heidelberg anschauen ;).

Die Exkursion war ein wirklich toller Tag, und vielleicht hat sie dem ein oder anderen aus unserem Kurs auch eine Ahnung gegeben, welchen Beruf man später ausüben könnte.

Abschließende Worte – Was noch gesagt werden muss

Sarah Högerle, Miriam Kurtzhals, Stefan Möll, Magdalena Neureither

Unübersichtliche Tafelanschriebe, rauchende Köpfe, und angeregte Diskussionen, die kein Ende nehmen wollten. So sah's aus im Irrenhaus, ähm Mathekurs.

Doch das bedeutet nicht, dass wir keinen Spaß hatten, ganz im Gegenteil: Genau diese führten dazu, dass wir zwei unvergessliche und bereichernde Wochen erlebten.

Im Gegensatz zu anderen Kursen war unser Kurs etwas freier gestaltet, uns wurden keine Aufschriebe diktiert oder Formeln vorgegeben, vielmehr entstanden die Ergebnisse aus den gemeinsamen Diskussionen. Die unterschiedlichen Ansichten und Meinungen stellten dabei aber kein Hindernis dar. Denn gerade diese haben durch gegenseitiges Verbessern und kritisches Hinterfragen schließlich dazu geführt, dass wir am Ende die falschen Aspekte entlarven und auf die richtige Lösung stolz sein konnten. Aber auch außerhalb der Diskussionen ergänzten sich unsere unterschiedlichen Persönlichkeiten und Eigenschaften, von Barfußlaufen bis hin zu Sing- und Tanzeinlagen, wunderbar, sodass wir im Laufe der zwei Wochen immer mehr zu einer Gemeinschaft zusammenwuchsen. Mit einem Signifikanzniveau von 0,05 % können wir also behaupten, dass der Mathekurs einfach der beste war.

Danksagung

Sarah Högerle, Magdalena Neureither

Weil die Akademie für uns alle zu einer unvergesslichen Zeit geworden ist, wollen wir uns abschließend noch bei ein paar Personen bedanken, die das möglich gemacht haben. Zum einen gilt unser Dank unseren beiden Kursleitern Damián und Jochen, mit denen wir während der Akademie in die Geheimnisse der mathematischen Statistik eingetaucht sind.

Uns hat es mit euch beiden wirklich großen Spaß gemacht und wir hoffen, euch ging es nicht viel anders mit uns. Danke auch für so manche Geduld, dir ihr für uns aufbrachtet. Leider können wir immer noch nicht so richtig verstehen, warum ihr unseren Diskussionen ab und zu mal kein Ende gesetzt habt.

Auch unsere Schülermentorin Alicia haben wir alle ziemlich schnell liebgewonnen. Wir danken dir, dass du im Kurs immer für uns da warst und wir mit dir auch den einen oder anderen Scherz machen konnten. Dank dir wurden wir des Öfteren mit Süßigkeiten versorgt und zu kurze Pausen gab es bei uns so gut wie nie.

Gemeinsam mit euch Dreien konnten wir die Akademiezeit richtig genießen und viel dazulernen. Danke für alles!

Danksagung

Die JuniorAkademie Adelsheim / Science Academy Baden-Württemberg fand in diesem Jahr bereits zum 11. Mal statt. Daher möchten wir uns an dieser Stelle bei denjenigen bedanken, die ihr Stattfinden überhaupt möglich gemacht haben.

In diesem Jahr wurde die Akademie in erster Linie durch die H. W. & J. Hector Stiftung finanziell unterstützt. Einen weiteren Teil der Mittel trugen das Ministerium für Kultus, Jugend und Sport von Baden-Württemberg und der Förderverein der Science Academy e. V. bei. Dafür möchten wir uns an dieser Stelle bei allen Unterstützern ganz herzlich danken.

Die JuniorAkademie Adelsheim ist ein Projekt des Regierungspräsidiums Karlsruhe, das im Auftrag des Ministeriums für Kultus, Jugend und Sport, Baden-Württemberg und mit Unterstützung der Bildung & Begabung gGmbH Bonn für Jugendliche aus dem ganzen Bundesland realisiert wird. Wir danken daher dem Schulpräsidenten im Regierungspräsidium Karlsruhe, Herrn Prof. Dr. Werner Schnatterbeck, der Referatsleiterin des Referates 75 – Allgemein bildende Gymnasien, Frau Leitende Regierungsschuldirektorin Dagmar Ruder-Aichelin, Herrn Jurke und Frau Reinhard vom Ministerium für Kultus, Jugend und Sport sowie dem Koordinator der Deutschen Schüler- und JuniorAkademien in Bonn, Herrn Volker Brandt.

Wie in jedem Jahr fanden die etwas über einhundert Gäste sowohl während des Eröffnungswochenendes und des Dokumentationswochenendes als auch während der zwei Wochen im Sommer eine liebevolle Rundumversorung am Eckenberg-Gymnasium mit dem Landesschulzentrum für Umwelterziehung (LSZU) in Adelsheim. Stellvertretend für alle Mitarbeiter möchten wir uns für die Mühen, den freundlichen Empfang und den offenen Umgang mit allen bei Herrn Oberstudiendirektor Meinolf Stendebach, dem Schulleiter des Eckenberg-Gymnasiums, und Herrn Bürgermeister Klaus Gramlich besonders bedanken.

Zuletzt sind aber auch die Kurs- und KüA-Leiter gemeinsam mit den Schülermentoren und der Assistenz des Leitungsteams diejenigen, die mit ihrer hingebungsvollen Arbeit das Fundament der Akademie bilden. Ein besonderer Dank gilt an dieser Stelle Jörg Richter, der auch in diesem Jahr für die Gesamterstellung der Dokumentation verantwortlich war.

Diejenigen aber, die die Akademie in jedem Jahr einzigartig werden lassen und die sie zum Leben erwecken, sind die Teilnehmerinnen und Teilnehmer. Deshalb möchten wir uns bei ihnen und ihren Eltern für ihr Vertrauen ganz herzlich bedanken.