Kurs 3: Über Routenplaner, eingefärbte Landkarten und das Problem des Handlungsreisenden – Eine Einführung in die Graphentheorie

Tina Schmidt, Conrad Leidereiter,
Nico Röck

Wie organisiert man Einbahnstraßensysteme sinnvoll?
Ist es möglich, über jede der sieben Königsberger Brücken genau einmal zu gehen und wieder zu Hause anzukommen?
Warum ist in einer geschlossenen Gesellschaft die Anzahl der Personen, die einer ungeraden Anzahl an anderen Gästen die Hand schüttelt, immer gerade?

Diese und viele weitere realitätsnahe Probleme können mit Hilfe von graphentheoretischen Ansätzen mathematisch untersucht werden. Ein Graph besteht aus Knoten und Kanten, die diese Knoten miteinander verbinden. Beispielsweise werden bei der Routenplanung Städte durch Knoten und Straßen durch Kanten dargestellt. Bei dem „Königsberger Brückenproblem“ hingegen interpretiert man die Stadtteile als Knoten und die Brücken zwischen ihnen als Kanten.

Im Rahmen unserer Kursarbeit haben wir mathematische Beweistechniken wie Induktion und das Schubfachprinzip sowie die Grundlagen der Graphentheorie kennen gelernt, um solche praktisch motivierten Probleme zu untersuchen. Weiterhin haben wir uns mit Algorithmen, also genauen Rechenvorschriften, beschäftigt. Solche Algorithmen finden häufig Anwendung in unserem täglichen Leben wie zum Beispiel bei Routenplanern oder beim Erstellen von Stundenplänen. Dennoch sind für manche Probleme bis heute keine effizienten Lösungsverfahren bekannt und beschäftigen Mathematiker in der aktuellen Forschung.

An dieser Stelle möchten wir uns für zwei wunderschöne Wochen Sommerakademie bei unseren Teilnehmern herzlich bedanken. Trotz der kurzen Zeit hat sich ein außergewöhnlicher Teamgeist entwickelt, der zu herausragenden Leistungen bei der Rotation und Abschlusspräsentation beigetragen hat. Durch die angenehme Kursatmosphäre fiel es uns stets sehr leicht die anspruchsvollen Inhalte zu vermitteln. Wir hatten große Freude daran, mit den Teilnehmern unsere Begeisterung für Mathematik zu teilen. Bestimmt konnten wir durch die Kursinhalte bei dem einen oder anderen nicht nur den anfänglichen Durst nach Naturwissenschaften und insbesondere ihrer Sprache stillen, sondern auch einen Anstoß zur weiteren Beschäftigung damit geben.

Was macht eigentlich der Graphentheoriekurs?

Hannah Schammann, Maybritt Schillinger

Unsere Kursatmosphäre

Die Tafel ist bis in die letzte Ecke mit Zahlen, Buchstaben und Zeichnungen gefüllt. Für Außenstehende wird es vermutlich nicht nachvollziehbar gewesen sein, was diese Zeichen an der Tafel bedeuten sollten oder viel mehr, warum sich irgendjemand freiwillig in den Ferien mit solchen Dingen beschäftigt.

Aber die Teilnehmer des Mathekurses sind alle mit Abschreiben beschäftigt und begierig, das Thema zu verstehen. Jeder denkt intensiv über die Lösung des aktuellen Problems nach und man kann die Köpfe förmlich rauchen sehen. So oder so ähnlich sah eine Stunde im Graphentheorie-Kurs aus.
Im Allgemeinen hat in unserem Kursraum eine angenehme Stimmung geherrscht, wenn man von dem Stress kurz vor den Präsentationen einmal absieht. Am meisten haben uns die Anwendungen der Graphen interessiert. Dafür haben wir uns auch mit etlichen Definitionen, Sätzen und Beweisen auseinandergesetzt, an denen wir uns manchmal fast die Zähne ausgebissen haben. Aber auch das war keine große Hürde für uns.

Schreiben und Denken ...

Sportfest

Beim Sportfest zeigte sich, dass wir nicht nur bei der Kursarbeit ein eingespieltes Team waren. Obwohl manche Stationen mehr schlecht als recht bewältigt wurden, wie z. B. die Aufgabe, uns auf einer Bank alphabetisch nach Nachnamen sortiert aufzustellen, ohne dass jemand von der Bank fällt. Den letzten Aufgabenteil haben wir nicht ganz erfüllt, denn mehrere Teilnehmer sind von der Bank gefallen und konnten nur noch zuschauen.

Auch an anderen Stationen, bei denen es um Teamgeist ging, haben wir sehr gut abgeschnitten. Unsere beste Station war die „Reifenperformance“, bei der wir den Hula-Hoop-Reifen in einer Kette transportieren mussten. Unsere Performance wirkte sehr elegant und wurde von unserem Motto „Knoten! Kanten!“ lauthals begleitet. Beim Finale konnten wir dann unser gesamtes Können ausleben und gewannen in einem knappen Rennen die Staffel. Leider mussten wir uns beim Gesamtergebnis geschlagen geben und wurden gemeinsam mit zwei anderen Kursen Dritter.

Beim Zielwerfen hingegen haben wir die beste Punktzahl aller Kurse erreicht!

Rotation

Am Tag vor der Rotation sah es im Graphentheorie-Kurs etwas anders als gewohnt aus: Alle waren in Kleingruppen verteilt an Computern beim Folien erstellen, Layout zusammenfügen oder beim Ausformulieren. An der Tafel sah man die Gliederung für den späteren Vortrag: zunächst die wichtigsten Grundlagen, dann das Thema Eulertouren und das Königsberger Brückenproblem, zum Schluss das 4-Würfel-Problem.
Nach dem Mittagessen wurden dann die ersten Probevorträge gehalten. Zunächst wusste weder irgendjemand, was er sagen sollte, noch waren die Folien komplett oder überhaupt einigermaßen zumutbar. Wir wollen hier die Kopfschmerzen verursachenden Animationen oder ähnliches lieber nicht im Detail ausführen…

Aber der Mathe-Kurs ist fleißig. Letztendlich haben wir – innerhalb eines Tages mit einer kleinen Zusatz-Sitzung nach dem Abendessen – einen hervorragenden Vortrag erstellt und dann die Rotation gut hinter uns gebracht.

Abschlusspräsentation

Fünf Tage später: Der Tag vor den Abschlusspräsentationen ähnelte sehr dem Vorbereitungstag für die Rotation. Der Unterschied war, dass alles noch stressiger war.
An der Tafel stand nun eine erweiterte Gliederung, bei der zwei Themen ergänzt wurden: Die Rundreise zwischen unseren Teilnehmern und die Anwendungen von Graphentheorie im Alltag - zwei komplett neue Themen - und einige Ergänzungen.
Besonders an den Folien der Erklärung des 4-Würfel-Problems veränderten wir viel, aber auch an fast allen anderen Folien wurde noch mehrmals gefeilt. Ein kleiner Kampf gegen Chronos …
Denn das Problem war dann, dass die 38 Folien am Dienstagabend immer noch nicht fertig waren. So wurden die Folien schon morgens vor dem Frühstück weiter verbessert. In der Vormittags-Sitzung vor der Abschlusspräsentation wurde das Layout endlich fertig und der letzte Probevortag gehalten. Wir gestalteten unseren Raum einladend und stellten Stationen auf. An diesen konnte man unsere vier Würfel aufbauen, in Graphen Eulertouren suchen oder die verschiedenen Bundesländer Deutschlands mit vier Farben anmalen, natürlich mit verschiedenen Vorgaben.

Die große Abschlusspräsentation rückte immer näher, und schließlich war es so weit. Unser Raum füllte sich mit Zuhörern. Es gab nicht einmal genügend Sitzplätze und manche probierten sich schon an unseren Mitmach-Stationen. Einige von uns waren sehr aufgeregt. Aber zu Unrecht, denn wir waren alle sicher und meisterten unseren Vortrag schließlich problemlos. Insgesamt haben wir bei unserer Präsentationsvorbereitung nicht nur den Kampf gegen Chronos gewonnen, sondern auch Kairos beim Schopf gepackt. Wir haben die Chance genutzt, eine gelungene Präsentation vorzustellen und die Kursarbeit erfolgreich abzuschließen.

Unser Kurs

Sophie Bleuel

Obwohl Mathematiker oft als langweilig bezeichnet werden, lohnt es sich wirklich uns kennen zu lernen… oder?

Tina (Unsere Kursleiterin): Auf den ersten Blick ist Tina eine sehr ruhige Frau, doch trotzdem hatte sie alles im Griff. Sowohl ihre Jungs (Conrad und Nico) als auch uns. Dennoch ging sie sehr liebevoll und nett mit allen um und versorgte uns mit Tee und Keksen als viele krank waren. Noch dazu war sie die Expertin unter unseren Kursleitern und konnte alles super erklären, sogar, als wir manchmal echt nicht mehr weiter wussten. ☺

Conrad (Unser Kursleiter): Ganz in Conrads Sinne nimmt seine Vorstellung nicht viel Platz ein, denn er ist ein Fanatiker des Platzsparens! So nutzte er immer jeden Millimeter der Tafel aus. Das meine ich jetzt nicht als Hyperbel, sondern wortwörtlich: Um die Tafel nicht wischen zu müssen, neigte er dazu, einfach überall noch etwas hinzuschreiben. Man muss aber auch sagen, dass er der Kursleiter war, der sich die besten Geschichten zu den verschiedenen mathematischen Ausdrücken ausdachte.

Nico: Eine Verbindung zwischen „den Großen“ und uns „Kleineren“ bildete unser Schülermentor Nico. Er war stets für jeden Spaß zu haben, denn er war immer cool und lustig drauf. Außerdem führte er uns durch das Sportfest, bei dem er uns kräftig anfeuerte und motivierte. Doch dann beging er einen Fehler, indem er mit einem Hula-Hoop-Reifen spielte. Daraufhin „durfte“ er beim Bergfest einen Hula-Hoop-Tanz vorführen.

Bastian: Wie man ihn locken konnte? Mit Essen. Kam man mit Kuchen, Keksen oder Gummibärchen in den Kursraum, so war er der erste, der angerannt kam. Das ist verständlich, denn für manch eine logische Schlussfolgerung, die er machte, braucht man einfach ganz viel Energie. Er war ein regelrechter Experte im Kurs und dann ein Witzemacher in den Pausen.

Daniel: Auch wenn man genau pünktlich in den Kurs kam und deshalb eigentlich schon fast zu spät war, konnte man beruhigt sein, denn Daniel saß noch an irgendeinem Computer. Er war in Facebook. Das aber nur, weil er sehr kontaktfreudig ist, wie er selbst beim Eröffnungswochenende gesagt hatte. Seiner Meinung nach muss er seine Kontakte zum Beispiel über Facebook pflegen.☺

David: Er war buchstäblich besessen von dem Würfelproblem, denn in jeder Pause probierte er daran herum, doch ohne Erfolg. Daher war er sehr glücklich, als wir endlich die Lösung dazu bekamen. Erstaunlich waren vor allem seine Gedankenschlüsse, denn manchmal, wenn schon keiner mehr durchblickte, kam er und meinte: *„Achso, jaja, ist klar.“*

Florian: Er wird durch folgendes Zitat bestens charakterisiert: *„Ich hätte da noch eine Frage.“*, denn es verging eigentlich keine Stunde, ohne dass Florian das sagte. Obwohl es uns immer ein bisschen zum Lachen brachte, sind wir ihm eigentlich ganz dankbar dafür, denn oftmals traute man sich nicht selbst die Frage zu stellen. Doch durch Florians Frage bekam man die Antwort trotzdem, auch ohne selber fragen zu müssen.

Friderike: Insgesamt war sie ein sehr ruhiges Mädchen. Bei den Präsentationen war sie sehr organisiert und achtete auf perfekt geschriebene Karteikarten. Auch legte sie eine extra Schicht direkt nach dem Mittagessen ein, um noch den Text ihrer Gruppe für die Präsentationen auszuarbeiten.

Hannah: Sie war sehr ruhig und sagte eher wenig, doch wenn sie einmal ins Reden kam, war sie immer lustig und erlaubte sich auch mal einen Scherz. Während der Akademie entwickelte sie eine Leidenschaft für die Tanzart „Jumpstyle“ und tanzte am Abschlussabend heftig mit.

Hannes: Man kann nur jedem davon abraten sich auf ein Kartenspiel mit ihm einzulassen, denn egal was passiert, er wird einen austricksen. Besser bekannt als Dezemberparty-Hannes war er unser Kursclown, weil er immer den richtigen Spruch auf Lager hatte und es schaffte, selbst in die Präsentationen Witzen einzubauen. Außerdem zeichnete er gerne den K_{24} oder ähnliches, wenn ihm der Kurs zu leicht war.

Katharina: Eins war bei Katharina sicher: Sie war nie zu übersehen. Sie trug immer knallige Outfits, wie zum Beispiel eine blaue Hose zu einem weißen T-Shirt mit neongelben Schriftzügen, dazu neongrüne Ohrringe und knall bunte Turnschuhe. Außerdem war sie immer sehr lieb und für jeden Scherz zu haben. Wenn es um ihre Heimatstadt ging, kannte sie jedoch keinen Scherz. Wehe jemand sagte Konstanz, dann wurde er gleich angeschrien: *„Das heißt Konschtanz, nicht Konstanz!“*

Maybritt: Sie war eines unserer zwei Geburtstagskinder und somit ein Geburtstagskuchenteiler.
Auch sie wusste immer weiter, wenn alle anderen am Verzweifeln waren. Sie dachte während des Kurses immer mit und half allen weiter, die nicht mehr weiter kamen. Doch trotz aller Mathematik, verlor sie auch nie den Deutschunterricht aus dem Auge. So sagte sie immer Bescheid, wenn etwas grammatikalisch falsch war. Dank ihr sind unsere Aufschriebe frei von jeglichen Fehlern. ☺

Moritz: Moritz war unser Layout-Mann, denn bei jeder Präsentation setzte er sich vor die halbfertige Powerpoint und machte das Layout, welches nicht irgendwie zusammengebastelt war, sondern mit Kurslogo und vielem mehr versehen war. Hierbei wurden von ihm sogar die Farben aufeinander abgestimmt, damit sie ja nicht unangenehm ins Auge stachen. Natürlich war immer seine Teekanne mit dabei, die er permanent mit sich herum trug. Was hätten wir nur ohne ihn getan!

Paul: Unser Morgens-Jogger! Wenn er dann nach dem Joggen in den Kursraum kam, beschäftigte er sich zusammen mit David viel mit dem Würfelproblem. Und obwohl er eher ruhiger Natur war, hatte er immer den totalen Durchblick und die richtige Antwort bereit. Nur einmal war er sprachlos, als Tina ihn bat, bei den Präsentationen auf Hochdeutsch vorzutragen. Er tendierte sonst dazu, etwas Dialekt zu sprechen.

Selina: Folgende Situation ereignete sich fast jeden Tag: Vor einer Minute hat die Mittagsschiene angefangen. Die Kursleiter zählen durch, doch sie kommen nur auf dreizehn. Wer fehlt? Ein klarer Fall: Selina! Da sie immer an der Sport KüA mit Valentina teilnahm, musste sie danach duschen. Deshalb kam sie immer etwas verspätet mit klitsch nassen Haaren in den Nachmittagskurs.

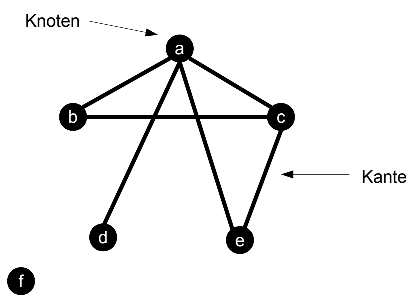
Simon: Unser zweites Geburtstagskind! Sein Geschenk, eine Wanduhr, gefiel ihm so sehr, dass er sich den Rest des Tages mit dem Einstellen dieser beschäftigte. Manche von uns ließ er darauf unterschreiben. Wenn irgendjemand einen Rechtschreibfehler an der Tafel bemängelte, war er der erste, der sagte: „Mann, wir sind hier nicht im Deutsch-, sondern im Mathekurs!“

Sophie: Sie war unsere Ausländerin im Kurs, da sie aus der Schweiz kommt. Wegen ihr war auch die theoretische Rundreise etwas umständlicher, worüber sich alle beklagten. Sie zeigte stets Teamgeist und war sehr fleißig. So legte sie zusammen mit Moritz eine Frühschicht ein, um der Abschlusspräsentation den letzten Schliff zu geben. Dabei war sie eher für die optische als für die technische Perfektion zuständig. ☺

Einführung in die Graphentheorie

Friderike Faller

Wir betrachten eine Geburtstagsparty und wollen die Bekanntschaften mit einem Graphen darstellen. Ein Graph besteht aus Knoten und Kanten. Eine Kante verbindet zwei verschiedene Knoten. Für eine Kante, die den Knoten x mit dem Knoten y verbindet, schreibt man xy. Mit V wird die Menge der Knoten, mit E die Menge der Kanten bezeichnet. Für den Graphen mit der Knotenmenge V und der Kantenmenge E schreibt man $G = (V, E)$.
Um einen Graphen darzustellen, zeichnet man Punkte für die Knoten und Linien zwischen den Punkten für die Kanten ein. Bei dem Beispiel einer Geburtstagsparty werden die Personen durch Knoten und die Bekanntschaften durch Kanten repräsentiert. Kennen sich zwei Personen, so findet man eine Kante zwischen den jeweiligen Knoten.



In diesem Graphen ist die Knotenmenge

$$V = \{a, b, c, d, e, f\}.$$

Jeder Gast wird durch einen Knoten mit seinem Anfangsbuchstaben dargestellt, z. B. steht a für

Anja und b für Berta. Die Kantenmenge ist

$$E = \{ab, ac, ad, ae, bc, ce\}.$$

Eine Kante stellt eine Bekanntschaft von zwei Gästen dar. Die Kante ae bedeutet, dass sich Anja und Emil kennen. Fred kennt niemanden zu Beginn der Party und der Knoten f ist daher durch keine Kante mit einem anderen Knoten verbunden.
Zwei Knoten, die durch eine Kante miteinander verbunden sind, nennt man benachbart. Zu einem Knoten x benachbarte Knoten werden als seine Nachbarn bezeichnet. Die Menge der Nachbarn von x nennt man Nachbarschaft von x. Dafür schreibt man:

$$N(x) = \{y \in V \mid xy \in E\}.$$

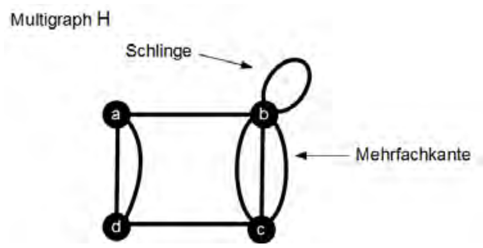
Die Anzahl der Nachbarn eines Knotens wird als Grad des Knotens bezeichnet. Man definiert $\deg_G(x) = |N(x)|$. Ist klar, um welchen Graphen es sich handelt, schreibt man auch $\deg(x)$ für $\deg_G(x)$. Im Beispiel der Geburtstagsparty sind a und c benachbart. Dagegen sind c und d nicht benachbart. Das bedeutet, dass sich Anja und Christina kennen, aber Christina und David kennen sich nicht. Für die Nachbarschaft von a schreibt man:

$$N(a) = \{b, c, d, e\}.$$

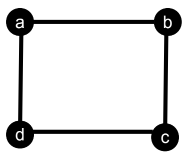
Der Knoten a ist mit vier Knoten benachbart, die in der Nachbarschaftsmenge von a enthalten sind. Daher gilt, dass $\deg(a) = 4$. Der Grad einer Person gibt in diesem Beispiel an, wie viele andere Personen er/sie kennt, beispielsweise kennt Anja vier Personen.

Multigraphen

Bisher haben wir einfache Graphen betrachtet. Sie besitzen höchstens eine Kante zwischen zwei Knoten und es gibt auch keine Kante, die von einem Knoten zum selben Knoten zurückführt. Multigraphen weisen diese Einschränkungen nicht auf. Bei Multigraphen sind Kanten, die zum selben Knoten x zurückführen, zugelassen. Solch eine Kante xx nennt man Schlinge. Außerdem können mehrere Kanten zwischen zwei Knoten verlaufen. Diese Kanten werden als Mehrfachkanten bezeichnet. Um den Grad eines Knotens x in einem Multigraphen zu bestimmen, zählt man alle Kanten, die von x ausgehen. Eine Schlinge xx trägt 2 zu $\deg(x)$ bei.



Bei dem abgebildeten Multigraph H schreiben wir für die Knotenmenge $V = \{a, b, c, d\}$. Die Kantenmenge wird als Multimenge aufgeschrieben. In einer Multimenge kann ein Element auch mehrmals enthalten sein. Hier ist $E = \{ab, ad, ad, bb, bc, bc, bc, cd\}$. Die Grade von a und b sind $\deg(a) = 3$ und $\deg(b) = 6$. Jeder Multigraph kann durch Löschen aller Schlingen und Reduzieren von Mehrfachkanten auf einzelne Kanten in einen „normalen" Graphen umgewandelt werden. Deshalb ist jeder Graph auch ein Multigraph.

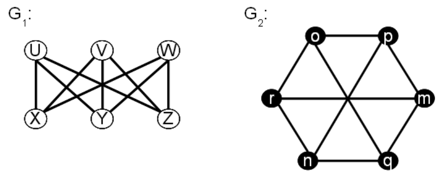


Hier wurde der Multigraph H in einen Graphen umgewandelt.

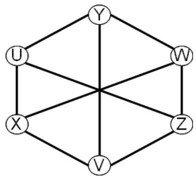
Isomorphie

Katharina Börsig

Beispiel



Den Graph G_1 kann man auch so zeichnen:



Das heißt, dass diese Graphen genau dasselbe darstellen. Sie sind nur anders gezeichnet.

Definition

Zwei Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ heißen isomorph, wenn es eine eins-zu-eins Abbildung f (d.h. jedem Knoten von G_1 wird genau ein Knoten von G_2 zugeordnet und umgekehrt) von V_1 nach V_2 gibt, sodass die zwei Knoten in G_1 benachbart sind, genau dann, wenn die von f zugehörigen Knoten in G_2 benachbart sind.

Die Graphen G_1 und G_2 des Beispiels sind isomorph. Denn die Abbildung f kann so gewählt werden:

Knoten aus G_1	u	v	w	x	y	z
Knoten aus G_2	n	m	o	q	r	p

Beispielsweise kann man den Knoten u auf den Knoten n abbilden. Jeder Nachbar von n kann einem Nachbar von u zugeordnet werden. So wird der Knoten y dem Knoten r zugeordnet.

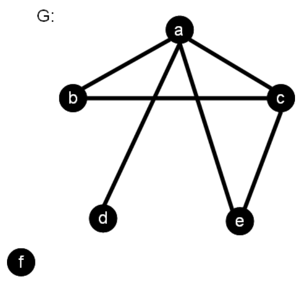
Subgraphen

Katharina Börsig

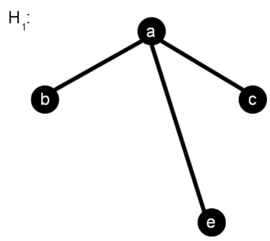
Definition

Ein Graph $H = (W, F)$ heißt Subgraph vom Graphen $G = (V, E)$, falls H selbst ein Graph ist mit $W \subset V$ und $F \subset E$, das heißt wenn in H nur Knoten und Kanten vorhanden sind, die auch in G vorhanden sind.

Beispiel anhand Anjas Geburtstagsparty



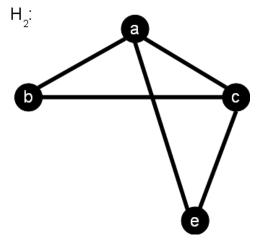
Dieser Graph stellt die Bekanntschaften der Gäste von Anjas Geburtstagsparty dar. Nun will man sich nur die Personen anschauen, die mit Anja (Knoten A) geredet haben, unter der Voraussetzung, dass Anja nur mit denen redet, die sie kennt. Wir nehmen an, dass sie nur mit 3 Leuten der Party geredet hat, und zwar mit Berta (Knoten B), Christina (Knoten C) und Emil (Knoten E). Damit erhält man den Graphen H_1, der ein Subgraph von G ist.



Induzierte Subgraphen

Ein induzierter Subgraph $H = (W, F)$ ist ein Subgraph von $G = (V, E)$, bei dem F alle Kanten $xy \in E$ mit $x, y \in W$ enthält. Ein Subgraph ist also genau dann ein induzierter Subgraph, wenn H alle Kanten zwischen allen Knoten enthält, die auch in G enthalten sind.

Beispiel für einen induzierten Subgraph von G:



Hier schaut man sich einen Teil der Gäste und alle vorhandenen Bekanntschaften zwischen diesen Gästen an. In H_2 sind alle Kanten vorhanden, die es in G zwischen diesen Knoten gibt. H_1 ist kein induzierter Subgraph, weil die Kanten ae und bc fehlen.

Mengen und verschiedene Beweistechniken

Selina Kurtz, Bastian Boll

Bereits am Eröffnungswochenende haben wir uns mit einigen Grundlagen der Mathematik beschäftigt. Dazu zählen unter anderem die Mengenlehre und verschiedene Beweistechniken.

Mengenlehre

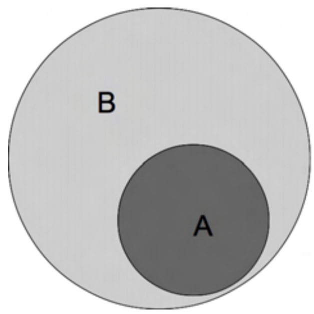
Die Zusammenfassung von bestimmten unterscheidbaren Objekten nennt man Menge. Dabei muss von den Objekten eindeutig feststellbar sein, ob sie zur entsprechenden Menge gehören oder nicht.

Ein Objekt, das zu einer Menge gehört, wird als Element dieser Menge bezeichnet. Zum Beispiel können wir die Menge der Teilnehmer des Graphentheoriekurses betrachten. Dann sind wir Teilnehmer die Elemente der Menge Graphentheoriekurs.

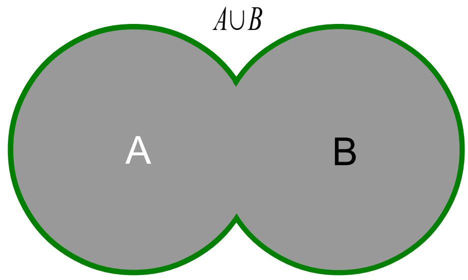
Für Mengen definiert man folgende Operationen:

Mengengleichheit $A = B$:
Zwei Mengen A und B sind gleich, wenn jedes Element von A auch Element von B ist und umgekehrt.

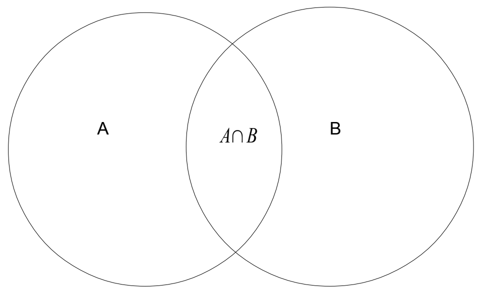
Teilmenge $A \subset B$:
A ist Teilmenge von B, wenn jedes Element von A auch Element von B ist.



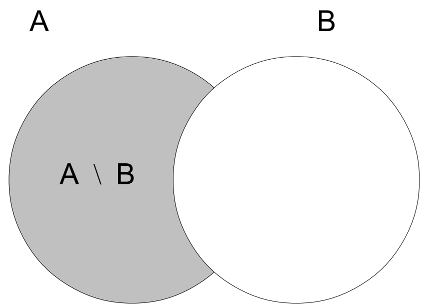
Vereinigungsmenge $A \cup B$:
Die Vereinigungsmenge ist die Menge aller Elemente, die zu A oder zu B oder zu beiden Mengen gehören.



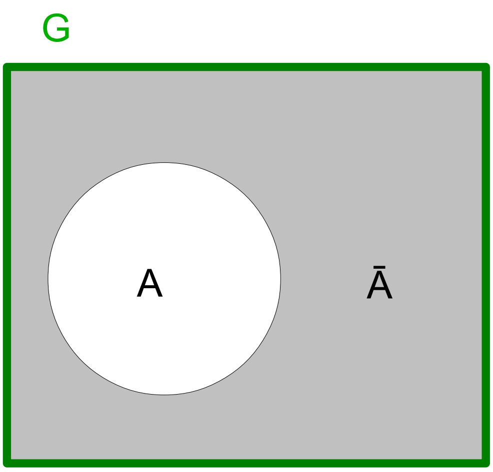
Schnittmenge $A \cap B$:
Als Schnittmenge bezeichnet man die Menge aller Elemente, die zu den Mengen A und B gehören.



Differenzmenge $A \setminus B$:
Die Differenzmenge ist die Menge aller Elemente von A, die nicht zu B gehören.



Komplementmenge $\bar{A} = G \setminus A$:
Wenn A Teilmenge des Grundbereichs G ist, dann bilden alle Elemente von G, die nicht zu A gehören, die Komplementmenge $\bar{A}$.



Zahlenmengen

Außerdem lassen sich Zahlen auch in verschiedene Mengen unterteilen, z. B. die Menge der

- natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$,
- ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, \ldots\}$,
- rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$, die alle Brüche enthält, und
- reellen Zahlen $\mathbb{R}$, die alle Brüche und auch irrationale Zahlen wie π enthält.

Die Menge der natürlichen Zahlen ist Teilmenge der ganzen Zahlen, die ganzen Zahlen sind Teilmenge der rationalen Zahlen und diese sind wiederum Teilmenge der reellen Zahlen:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

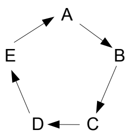
Für die natürlichen Zahlen gibt es mehrere Definitionen. Wir haben uns darauf geeinigt, dass die natürlichen Zahlen bei 1 anfangen und alle positiven ganzen Zahlen enthalten. Wollen wir die 0 mit in die Menge aufnehmen, schreiben wir $\mathbb{N}_0$.

Beweistechniken

Außerdem haben wir am Eröffnungswochenende fünf verschiedene Beweistechniken kennen gelernt. Dabei unterscheiden wir zwei unterschiedliche Arten von Folgepfeilen.
„$A \Rightarrow B$“ bedeutet, dass sich aus A die Aussage B folgern lässt, jedoch nicht unbedingt auch umgekehrt.
„$A \Leftrightarrow B$“ ist eine Schreibweise für die Äquivalenz der Aussagen A und B, das heißt, es lässt sich sowohl aus der Aussage A die Aussage B folgern als auch umgekehrt. Beim direkten Beweis wird eine Aussage B durch logische Schlüsse direkt aus der Voraussetzung A gefolgert, also $A \Rightarrow B$.
Eine Aussage A könnte zum Beispiel lauten: „Es regnet.“ Eine dazu passende Aussage B wäre: „Die Straße ist nass.“ $A \Rightarrow B$ bedeutet nun: „Wenn es regnet, ist die Straße nass.“ Dies bedeutet aber nicht, dass auch $B \Rightarrow A$ gilt, denn es muss nicht unbedingt regnen, wenn die Straße nass ist. Es könnte ja auch sein, dass die Straße aus einem anderen Grund nass geworden ist.

Das Gegenstück dazu ist der indirekte Beweis. Die Gültigkeit der Aussage B unter der Voraussetzung A wird gezeigt, indem man aus dem logischen Gegenteil von B das logische Gegenteil von A folgert. Beispielsweise kann die Aussage A „Es existiert Kuchen.“ sein. Eine dazu passende Aussage B könnte nun lauten: „Jemand

hat Kuchen gebacken.“ Um die Gültigkeit von $A \Rightarrow B$ zu beweisen, prüfen wir beim indirekten Beweis, ob aus dem logischen Gegenteil von B das logische Gegenteil von A folgt. In unserem Beispiel entspräche dies: „Wenn niemand Kuchen gebacken hat, dann existiert kein Kuchen.“ Beim Widerspruchsbeweis nehmen wir an, dass die Aussage, die wir beweisen wollen nicht stimmt und zeigen, dass ein Widerspruch zur getroffenen Annahme oder einem Grundsatz der Mathematik entsteht, zum Beispiel $1 = 2$.
Das Ziel eines Äquivalenzbeweises ist es, zu zeigen, dass aus der Aussage A die Aussage B folgt und aus B die Aussage A, das heißt, A und B sind äquivalent. Hierbei ist ein Beweis für jede einzelne „Richtung“ nötig. Man muss also sowohl $A \Rightarrow B$ als auch $B \Rightarrow A$ zeigen. Um die Äquivalenz mehrerer Aussagen zu zeigen verwendet man einen Ringschluss.



Hierbei beginnt man damit, aus einer Aussage A eine andere Aussage B zu folgern. Anschließend wird aus der Aussage B die Aussage C gefolgert. Lässt sich aus der letzten Aussage wieder die erste folgern, sind alle Aussagen des Ringschlusses äquivalent.

Induktion

KATHARINA BÖRSIG

Mit Induktion beweist man eine Aussage, die von einer natürlichen Zahl k abhängt. Um eine bessere Vorstellung davon zu bekommen, kann man sich die Induktion mit Dominosteinen veranschaulichen. Dabei steht jeder Dominostein für eine Aussage über ein bestimmtes k. Bei der Induktion geht man nach einem bestimmten Schema vor:

Induktionsanfang: Zeige, dass die Behauptung $A(n)$ für das erste Element $n = n_0$ gilt.

Induktionshypothese: Nehme an, dass die Behauptung für eine beliebige Zahl k stimmt.

Induktionsschritt: Zeige, dass die Behauptung für $k + 1$ gilt. Benutze hierzu die Induktionshypothese.

Anschauliches Beispiel

Zeige: Eine Reihe von Dominosteinen fällt um.

Induktionsanfang: Zeige, dass der erste Dominostein den nächsten anstößt, wenn er umfällt.

Induktionshypothese: Nehme an, dass ein beliebiger Dominostein k den nächsten Dominostein anstößt, wenn er umfällt.

Induktionsschritt: Zeige, dass der $k+1$ste Dominostein den nächsten Dominostein anstößt, wenn er umfällt.

Im anschaulichen Beispiel kann man durch die physikalische Wechselwirkung die Aussage des Induktionsschrittes begründen.

Durch die Induktion ist nun bewiesen, dass nach dem Anstoßen des ersten Steins dieser umfällt, der stößt den zweiten um, dieser den nächsten …

Beispiel

Zeige: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $5^n + 7$ ist durch 4 teilbar.

Induktionsanfang: $n_0 = 1$
$5^1 + 7 = 12 = 3 \cdot 4 \qquad \checkmark$

Induktionshypothese: $n = k$
Für ein $k \in \mathbb{N}$ ist $5^k + 7$ durch 4 teilbar, d. h. $5^k + 7 = i \cdot 4$, für ein $i \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: $n = k + 1$

Zu zeigen: Es gibt ein $m \in \mathbb{N}$, sodass $5^{k+1} + 7 = m \cdot 4$.

$$\begin{aligned} 5^{k+1} + 7 &= 5^k \cdot 5 + 7 \\ &= \underbrace{5^k + 5^k + 5^k + 5^k}_{4 \cdot 5^k} + 5^k + 7 \\ &= 4 \cdot 5^k + \underbrace{5^k + 7}_{= i \cdot 4 \text{ nach Ind. Hyp.}} \\ &= 4 \cdot 5^k + i \cdot 4 \\ &= 4 \cdot \underbrace{(5^k + i)}_{= m}. \end{aligned}$$

□

Das Schubfachprinzip

Simon Lay

Betrachtet man Objekte, die in Kategorien eingeteilt sind, so kann man mit Hilfe des Schubfachprinzips eine Aussage über die Mindestanzahl von Objekten in einer Kategorie treffen. Dabei ist nicht bekannt, wie viele Objekte sich genau in dieser Kategorie befinden. Das Schubfachprinzip gibt lediglich an, wie viele Objekte sich mindestens in der Kategorie befinden. Im Folgenden wird $\lceil x \rceil$ für die Zahl geschrieben, die man erhält, wenn man x aufrundet, zum Beispiel ist $\lceil 3,27 \rceil = 4$.

Satz:
Seien m Objekte in n Kategorien eingeteilt.
$\Rightarrow$ Es gibt eine Kategorie mit mindestens $\lceil \frac{m}{n} \rceil$ Objekten.

Jedoch kann man mit dem Schubfachprinzip nur über *eine* Kategorie eine Aussage treffen und nicht über mehrere. Außerdem ist unbekannt, über welche Kategorie man die Aussage trifft.

Beispiel

Die Zwillinge Karl und Klaus gehen wandern. Sie haben sich einen Rucksack mit 10 Birnen, 18 Äpfeln, 7 Bananen und 5 Orangen für ihr Picknick gepackt. Durch das Schubfachprinzip lässt sich zeigen, wie viele gleiche Früchte sie mindestens erhalten, wenn sie fünfmal ziehen.

Die vier Fruchtarten sind die vier Kategorien. Die Anzahl der Züge ist gleich der Anzahl der Objekte.

$$\Rightarrow \left\lceil \frac{5}{4} \right\rceil = \lceil 1,25 \rceil = 2.$$

Demnach erhält man mindestens zwei gleiche Früchte, wenn man fünfmal zieht.

Nun kommt ihr Drillingsbruder Kai hinzu und alle drei Brüder wollen die gleiche Frucht essen. Jetzt wollen wir herausfinden, wie oft die drei ziehen müssen.

Durch das Hinzukommen von Kai benötigen wir drei als Ergebnis, da nun jeder der drei Brüder eine Frucht gleicher Art haben möchte. Die Anzahl der Kategorien bleibt gleich der Anzahl der verschiedenen Früchte. Die Anzahl der Objekte ist unbekannt.

Durch Einsetzen der bekannten Größen kommt man auf diese Gleichung:

$$\left\lceil \frac{?}{4} \right\rceil = 3.$$

Durch Ausprobieren kommt man auf folgendes

Ergebnis:

$$\left\lceil \frac{9}{4} \right\rceil = 3.$$

Demnach müssen die Drillinge höchstens neunmal ziehen, um drei gleiche Früchte zu haben.

Lemma:
In jedem Graphen mit mindestens zwei Knoten gibt es zwei Knoten mit gleichem Grad.

Beweis:
Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $n = |V|$ die Anzahl der Knoten von G. Sei weiter

$$\begin{aligned} n' &= \text{ Anzahl der Kategorien} \\ m' &= \text{ Anzahl der Objekte.} \end{aligned}$$

Um das Schubfachprinzip anzuwenden, betrachten wir die Knoten als Objekte und teilen sie nach ihrem Grad in Kategorien ein. K_i ist die Kategorie, die alle Knoten mit Grad i enthält. Außerdem gilt $m' = n$.

Der Grad eines Knotens v ist höchstens $n - 1$, da er höchstens mit allen anderen Knoten benachbart sein kann, außer sich selbst.
$\Rightarrow$ Es gibt $n' = n$ Kategorien.

Da es in einem Graphen nicht gleichzeitig einen Knoten geben kann, der mit allen anderen Knoten benachbart ist und einen, der Grad null hat, ist eine der beiden Kategorien K_0 oder K_{n-1} leer.
$\Rightarrow$ Es gibt höchstens $n' = n - 1$ nicht leere Kategorien.

Wendet man das Schubfachprinzip an, ergibt sich, dass es eine Kategorie K_i mit mindestens $\lceil \frac{m'}{n'} \rceil = \lceil \frac{n}{n-1} \rceil = 2$ Elementen gibt.

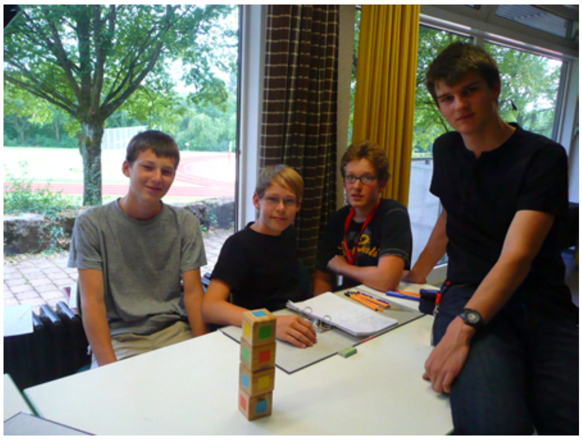
$\Rightarrow$ Es gibt 2 Knoten $x \neq y \in V$ mit $\deg(x) = \deg(y) = i$. □

Wege und Kreise

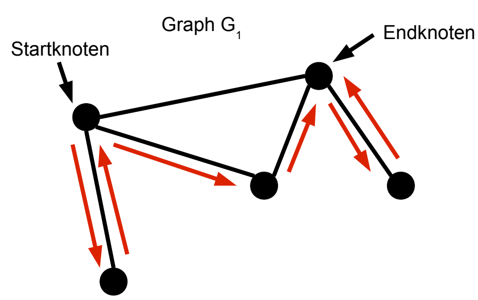
Maybritt Schillinger, Friderike Faller

Kantenzüge

Stellen wir uns vor, wir gehen auf einem Graphen spazieren. Wir beginnen bei einem beliebigen Knoten, welcher auch als Startknoten bezeichnet wird. Dann laufen wir entlang einer beliebigen Kante, die von diesem Knoten ausgeht und uns zu einem Nachbarn des Startknotens führt. Dies kann man beliebig oft wiederholen.



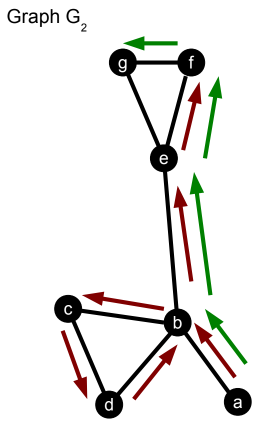
Am Ende haben wir verschiedene Knoten besucht, wobei aufeinanderfolgende Knoten benachbart sind. Der Knoten, bei dem wir am Schluss ankommen, heißt Endknoten.



Ein Kantenzug ist eine Folge von Knoten v_1, v_2, …,v_k, wobei v_i und v_{i+1} benachbart sind.

Dabei dürfen Knoten und Kanten mehrfach verwendet werden.

Die Länge eines Kantenzuges wird durch Zählen der einzelnen Kanten, die durchlaufen werden, bestimmt. Die Länge des roten Kantenzuges im Graphen G_1 beträgt daher sechs. Spezialfälle von Kantenzügen sind Wege und Pfade: Ein Weg ist ein Kantenzug, bei dem keine Kante doppelt verwendet wird. Im Graphen G_2 ist der Weg a, b, c, d, b, e, f rot markiert.

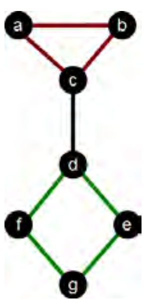


Ein Pfad ist ein Kantenzug, bei dem keine Kante und kein Knoten doppelt verwendet wird. Im Graphen G_2 ist der Pfad a, b, e, f, g grün markiert. Der rot markierte Weg ist kein Pfad, weil der Knoten b doppelt verwendet wird.

Kreise

Ein Kreis besteht aus einem Pfad und einer zusätzlichen Kante zwischen dem Startknoten und dem Endknoten des Pfades. Die Anzahl der Kanten, die in dem Kreis enthalten sind, bezeichnet man als Länge des Kreises. Sie beträgt mindestens drei.

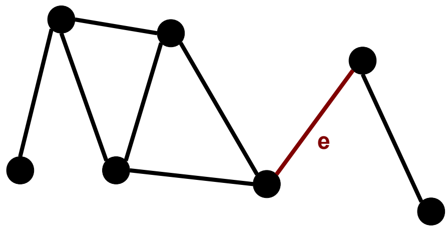
Die Länge des roten Kreises in dem folgenden Graphen beträgt drei, die des grünen Kreises vier.



Zusammenhang und Zusammenhangskomponenten

Maybritt Schillinger, Friderike Faller

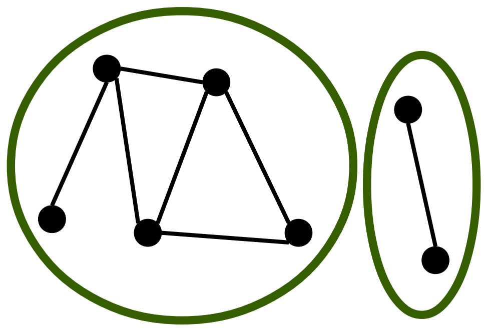
Zusammenhang



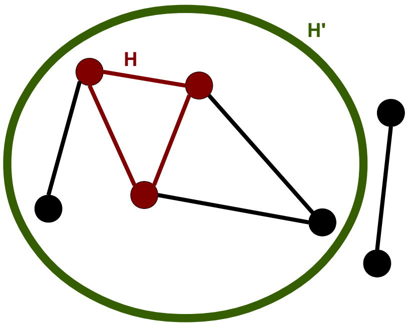
Beispiel für einen zusammenhängenden Graphen.

Wenn wir die Kante e entfernen, ist der abgebildete Graph nicht mehr zusammenhängend. Ein Graph ist zusammenhängend, wenn er nicht aus mehreren Teilen besteht, die nicht durch Kanten verbunden sind. Mathematisch gesehen bedeutet das, dass wir zwei beliebige Knoten des Graphen wählen können, sodass man immer einen Pfad zwischen ihnen finden kann.

Zusammenhangskomponenten



Die in diesem Graphen grün eingekreisten Teile des Graphen sind Zusammenhangskomponenten. Eine Zusammenhangskomponente H ist ein Subgraph, der zusammenhängend ist. Es darf kein zusammenhängendes H' existieren mit $H \subsetneq H'$. Das heißt, H muss so groß wie möglich sein. Würde ein zusammenhängendes H' existieren, welches größer ist und H beinhaltet, dann wäre H keine Zusammenhangskomponente mehr.



Die in diesem Graphen rot markierten Knoten und Kanten sind keine Zusammenhangskomponente H, da ein zusammenhängendes H' (grün umkreist) existiert, für das $H \subsetneq H'$ gilt.

Eulertouren

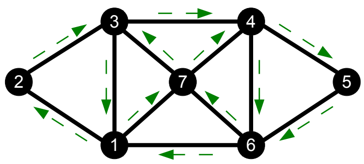
Sophie Bleuel, Selina Kurtz

Eulertouren werden in Knobelaufgaben verwendet, wenn man beispielsweise eine Grafik nachzeichnen soll, ohne den Stift abzusetzen und ohne eine Linie doppelt zu zeichnen. Oftmals kann man solche Aufgaben durch Graphentheorie lösen.

Man kann die Linien, die man nachfahren soll, durch Kanten modellieren. Wenn sich zwei Linien kreuzen, fügt man einen Knoten ein. Eine Lösung kann durch eine Eulertour beschrieben werden.

Ein Graph G hat eine Eulertour, wenn es einen Weg gibt, der jede Kante der Kantenmenge E einmal verwendet und mit demselben Knoten anfängt und aufhört.

Eine Eulertour ist somit eine Rundtour durch einen Graphen, die jede Kante genau ein Mal durchläuft.

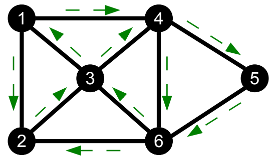


Man besucht die Knoten in der Reihenfolge:

$$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 7 \to 3$$
$$\to 1 \to 7 \to 4 \to 6 \to 1.$$

Eine notwendige Voraussetzung für eine Eulertour ist, dass der Graph zusammenhängend ist. Andernfalls ist es unmöglich, jeden Knoten zu besuchen, da die einzelnen Zusammenhangskomponenten nicht durch Kanten miteinander verbunden sind.

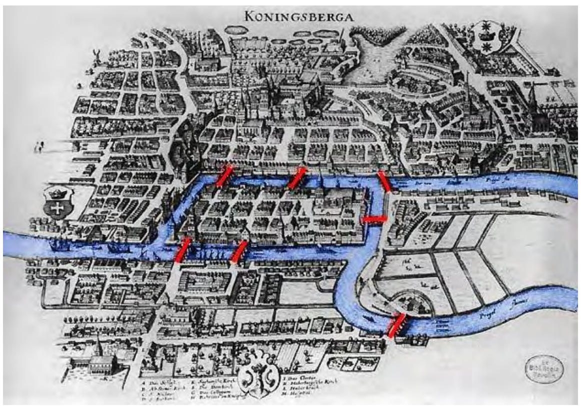
Ein Graph, der keine Eulertour enthält, hat einen Eulerweg, wenn jede Kante genau ein Mal verwendet wird, der Startknoten aber nicht dem Endknoten entspricht.



Man besucht die Knoten in der Reihenfolge:

$$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 3 \to 1$$
$$\to 4 \to 6 \to 2.$$

Diese Graphen sind nach dem Mathematiker Leonhard Euler (1707–1783) benannt. Er hat sich unter anderem mit dem Königsberger Brückenproblem beschäftigt. Königsberg, heute Kaliningrad, ist eine Stadt in Russland. Diese Stadt besitzt vier Stadtteile, die durch den Fluss Pregel geteilt werden und durch sieben Brücken miteinander verbunden sind.

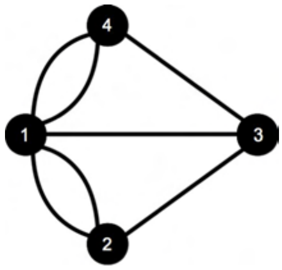


Königsberg[1]

Im 18. Jahrhundert trat die Frage auf, ob es möglich ist, alle sieben Brücken genau einmal zu überqueren und am Schluss wieder zu Hause anzukommen. Euler bewies, dass dies nicht möglich ist. Um sein Ergebnis nachzuvollziehen, haben wir Königsberg durch einen Graphen

[1] Quelle: http://www.slideshine.de/20022/Image-Koenigsberg, Map by Merian-Erben 1652.jpg

dargestellt. Dabei modellieren die Knoten die Stadtteile und die Kanten stellen die Brücken zwischen den Stadtteilen dar.



Dieser Graph ist auch unser Kurslogo.

Damit man in einem Graphen eine Eulertour finden kann, muss der Grad jedes Knotens gerade sein. Das liegt daran, dass das Erreichen und anschließende Verlassen eines Knotens immer eine gerade Zahl zu dessen Grad beiträgt.

Satz:
Sei $G = (V, E)$ zusammenhängend. Dann sind folgende drei Aussagen äquivalent:

1. *G enthält eine Eulertour.*
2. *Für alle $v \in V$ ist $\deg(v)$ gerade.*
3. *E lässt sich in kantendisjunkte Kreise, das heißt Kreise, die keine gemeinsamen Kanten haben, teilen.*

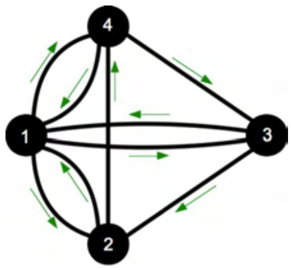
Um zu zeigen, dass alle drei Aussagen äquivalent zueinander sind, verwenden wir einen Ringschluss.

Oben haben wir bereits argumentiert, dass (1) $\Rightarrow$ (2) gilt.

Die Richtung (2) $\Rightarrow$ (3) haben wir mit Induktion über die Anzahl der Kanten gezeigt. Um aus drittens erstens zu folgern, führt man einen Induktionsbeweis über die Anzahl der Kreise. Wir haben hier nicht den ganzen Beweis aufgeführt, sondern nur einige Beweisideen, da wir den Beweis im Sommer im Kurs gemacht haben und er relativ lang war.

Alle Knoten des Graphen von Königsberg haben einen ungeraden Grad. Folglich ist es nicht möglich in diesem Graphen eine Eulertour zu finden. Man könnte das Problem lösen, indem man Kanten so hinzufügt, dass jeder Knoten einen geraden Grad besitzt. Wenn man also durch Königsberg einen Spaziergang machen möchte, müsste man zusätzlich noch zwei Brücken zwischen den Stadtteilen bauen.

Der folgende Graph stellt Königsberg mit den zwei neuen Brücken dar.



Man besucht die Knoten in der Reihenfolge:

$$1 \to 4 \to 1 \to 2 \to 1 \to 3 \to 2 \to 4 \to 3 \to 1.$$

Bäume

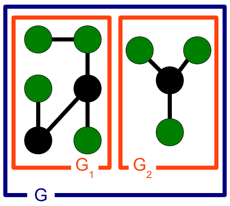
David Stürner, Moritz Kern

Graphen mit bestimmten Eigenschaften werden als Bäume bezeichnet. Sie werden zum Beispiel verwendet, um ein Stromnetz zu bauen, das möglichst günstig sein soll. Das heißt, wir möchten alle Orte möglichst billig mit Strom versorgen.

Definitionen

Ein Graph G heißt Wald, wenn er kreisfrei ist. Das heißt, dass man keinen Kreis in diesem Graphen G finden kann. Ein zusammenhängender Wald G heißt Baum. Als Blatt bezeichnet man einen Knoten x, der Grad 1 hat. Er ist also mit genau einem anderen Knoten y benachbart.

Dieser Graph G ist ein Wald, weil er kreisfrei ist. Die Subgraphen G_1 und G_2 sind Bäume, da sie



Dieser Graph G ist ein Wald mit Bäumen G_1 und G_2.

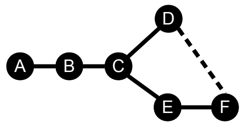
zusammenhängend sind. Die grünen Knoten sind Blätter, weil sie Grad 1 haben.

Beispiel

Der Netzbetreiber „Energiesuper“ hat in Augsburg ein Kraftwerk gebaut. Nun möchte er die Orte Berlin, Chemnitz, Dortmund, Essen und Frankfurt möglichst günstig mit Strom versorgen und baut deshalb Stromleitungen zwischen den Städten.

Wir modellieren die Städte als Knoten A, B, C, D, E und F. Wenn eine Stromleitung zwischen den Städten X und Y gebaut wird, dann fügen wir eine Kante XY ein. Da alle Orte versorgt sein sollen, muss der Graph zusammenhängend sein. „Energiesuper“ möchte die Kosten so gering wie möglich halten. Deshalb werden nur so viele Leitungen wie nötig gebaut.

Zum Beispiel wäre im folgenden Bild eine Leitung zwischen Dortmund und Frankfurt unnötig, da auch ohne sie beide Städte schon versorgt sind. In einem Kreis kann eine Kante entfernt werden und der Graph bleibt zusammenhängend. Also wird ein kreisfreier und zusammenhängender Graph gesucht, der alle Knoten $A, B, \ldots, F$ verwendet.



Hier sieht man ein mögliches Stromnetz von „Energiesuper“ mit der minimalen Anzahl an Leitungen.

Um ein Stromnetz realistisch zu untersuchen, müssen wir einen gewichteten Graphen betrachten. Deshalb ordnen wir jeder Kante ein Gewicht zu, das hier die Kosten für den Bau einer Leitung in Millionen Euro darstellt.

Der Minimal Spanning Tree

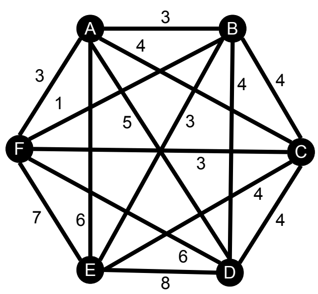
Die Bäume werden im weiteren Verlauf verwendet, um ein kostengünstiges Stromnetz, das alle Orte mit Strom versorgt, zu suchen. Deshalb will man einen Subgraphen von dem Graphen finden, der alle möglichen Leitungen enthält. Dieser Subgraph soll die geringste Summe aller Kantengewichte haben und alle Knoten beinhalten. Dadurch werden die Baukosten minimiert, während alle Orte mit Strom versorgt werden. Einen solchen Subgraphen nennen wir dann minimal spanning tree (=MST), auf Deutsch: minimaler aufspannender Baum. Dieser Subgraph T von G heißt aufspannender Baum von G, wenn T ein Baum ist und alle Knoten von G verwendet.
Wenn dieser Baum T ein minimales Kantengewicht unter allen aufspannenden Bäumen von G hat, so ist T ein minimal aufspannender Baum (=MST).

Eingabe: Ein gewichteter Graph $G = (V, E)$ mit positiven Kantengewichten.
Ausgabe: Ein MST (V, F) von G.

	Anweisung	Kommentar
1	Zuerst wird ein beliebiger Startknoten $s \in V$ gewählt.	Es wird ein Knoten benötigt, bei dem wir beginnen.
2	Der Knoten s wird nun der Menge S der schon verwendeten Knoten zugeordnet, d. h. $S = \{s\}$. Außerdem wird eine Menge F der bisher im MST verwendeten Kanten angelegt, d. h. $F = \{\}$.	S ist die Menge der Knoten, die schon im Baum sind und F ist die Menge der Kanten, die schon im MST sind. Wir fangen mit dem Baum $(\{s\}, \{\})$ an.
3	Nun suchen wir einen Knoten y, der noch nicht zur Menge S gehört und eine Kante yx zu einem Knoten $x \in S$ hat. Das Kantengewicht von yx soll unter allen Möglichkeiten minimal sein.	Suche einen Knoten und eine Kante mit minimalem Gewicht, die man zum Baum auf S hinzufügen kann.
4	Füge y in S ein, d. h. $S \leftarrow S \cup \{y\}$ und füge yx in F ein, d. h. $F \leftarrow F \cup \{yx\}$.	Der neu hinzugefügte Knoten gehört nun auch zu den Knoten, die im Baum sind. Die neu hinzugefügte Kante gehört ab jetzt zu den im MST verwendeten Kanten.
5	Solange noch nicht alle Knoten $v \in V$ auch in S sind, gehe zu Anweisung 3.	Wir wollen einen Baum mit allen Knoten haben, deshalb wiederholen wir diese Schritte so oft, bis wir alle Knoten verwendet haben.

Algorithmus von Prim

Um in einem gewichteten Graphen einen MST zu finden, kann man den Algorithmus von Prim verwenden. Die Idee des Algorithmus besteht darin, den MST Knoten für Knoten und Kante für Kante aufzubauen. Bei jedem Schritt wird also ein weiterer Knoten dem Subgraphen hinzugefügt. Dieser Knoten wird zur Menge S hinzugefügt. Die Kante, durch die wir diesen Knoten erreicht haben, wird in der Menge F gespeichert.

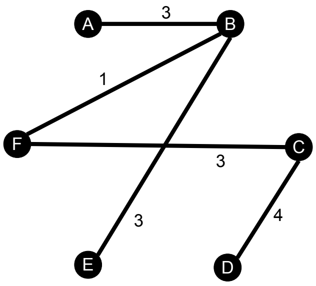


Dieser Graph modelliert alle möglichen Stromleitungen, die zwischen den Städten gebaut werden könnten.

Beispiel (Fortsetzung)

Nun wenden wir den Algorithmus von Prim in unserem Beispiel an: A ist der Startknoten, da in Augsburg das Kraftwerk steht. In Schritt 3 betrachten wir alle Kanten, die von A ausgehen. Die Kanten AB und AF haben die kleinsten Kantengewichte. Da es keinen Unterschied macht, welche Kante man wählt, suchen wir uns AB aus, dann ist $S = \{A, B\}$, $F = \{AB\}$, das heißt B ist mit Strom versorgt. Es sind noch nicht alle Knoten $v \in V$ in S. Deshalb gehen wir wieder zu Anweisung 3 und betrachten wieder alle Kanten, die einen verwendeten und einen noch nicht verwendeten Knoten verbinden: $AC, AD, AE, AF, BC, BD, BE, BF$. Die Kante BF ist mit dem Kantengewicht 1 die kürzeste. Wir nehmen diese und schließen F in unser Stromnetz mit ein, das heißt $S = \{A, B, F\}$, $F = \{AB, BF\}$. Diesen Schritt wiederholen wir und schließen nacheinander E, C und D über die Kanten BE, FC und CD an. Dann ist $S = \{A, B, C, D, E, F\}$ und enthält alle Knoten des eingegebenen Graphen $G = (V, E)$. Also ist $T = (V, F)$ ein MST. Um die Kos-

ten dieses günstigsten Stromnetzes zu erhalten, müssen wir die Kantengewichte aller Kanten $e \in F$ addieren: $w = 3+1+3+3+4 = 14$, das heißt das günstigste Stromnetz wird „Energiesuper“ 14 Millionen Euro kosten.



Das ist ein Stromnetz, das „Energiesuper“ bauen kann, welches wir mit dem Algorithmus von Prim gefunden haben. Dieses hat minimale Kosten.

Kürzeste Wege und der Dijkstra-Algorithmus

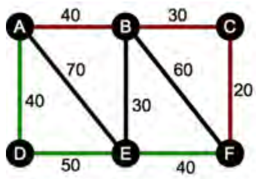
David Stürner, Moritz Kern

Jedes Navigationssystem versucht, einen kürzesten Weg zwischen zwei Orten, die als Knoten modelliert werden, zu finden. Zwar war dies für uns zuerst in Graphen wichtig, wir konnten aber schnell und einfach den Bezug zur Realität und der damit verbundenen Lösung einer solchen Aufgabe herstellen.

Definitionen

Ein Graph G ist gewichtet, wenn man jeder Kante e ein Gewicht $w(e)$ zuordnet. Die Länge eines Weges P, der die Kanten $e_1, e_2, \ldots, e_k$ verwendet, ist die Summe seiner Kantengewichte.
Ein Weg zwischen zwei Knoten x und y mit dem geringsten Gesamtkantengewicht unter allen x, y-Wegen ist ein kürzester x, y-Weg.

Beispiel



Dieser Graph stellt verschiedene Wege zwischen den Knoten A und F dar.

Die Länge des grün markierten A, F-Wegs beträgt $40 + 50 + 40 = 130$. Allerdings gibt es noch kürzere Wege, wie den hier rot markierten A, F-Weg. In einem kleinen Graphen, wie diesem, kann man den kürzesten Weg relativ leicht durch Ausprobieren finden. Der rot markierte Weg hat ein Kantengewicht von 90 und ist ein kürzester A, F-Weg.
In größeren Graphen steigt die Anzahl möglicher Wege von einem Knoten x zu einem anderen Knoten y exponentiell in der Anzahl der Knoten und man braucht zum Ausprobieren sehr lange.

Dijkstra-Algorithmus

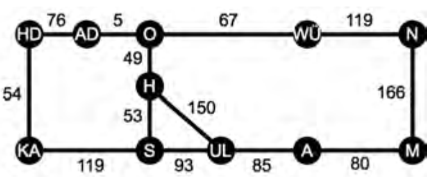
Deshalb benutzen wir einen effizienten Algorithmus. Das ist ein schnelles Verfahren zur

Eingabe: Ein gewichteter Graph G mit positiven Kantengewichten, ein Startknoten a und ein Zielknoten z.
Ausgabe: Ein kürzester a, z-Weg und dessen Länge $\text{dist}(a, z)$.

	Anweisung	Kommentar
1	Setze $\text{dist}(a) = 0$, $\text{dist}(x) = \infty \ \forall x \in V \setminus \{a\}$, $\text{pre}(x) = a \ \forall x \in V \setminus \{a\}$ und $S = \{a\}$.	Der Knoten a hat zu sich selbst die Distanz $\text{dist}(a) = 0$. Zu allen anderen Knoten ist noch kein kürzester Weg bekannt. S ist die Menge der Knoten, zu denen wir schon einen kürzesten Weg kennen. Der Vorgänger ist der Knoten, von dem wir auf unseren aktuellen Knoten kommen.
2	Wähle den Knoten $x \in V \setminus S$, sodass $\text{dist}(x)$ minimal unter allen Möglichkeiten ist.	Wir suchen nun einen Knoten x, der noch nicht in S ist und die kürzeste Distanz zum Startknoten s hat.
3	Füge x in die Menge S ein, d. h. $S \leftarrow S \cup \{x\}$.	Wir kennen nun einen kürzesten Weg zu x.
4	Berechne für alle Knoten $y \notin S$ die Summe des jeweiligen Kantengewichts $w(xy)$ und der Distanz $\text{dist}(x)$ im aktuellen Knoten x.	Überprüfe, ob es einen a, y-Weg gibt, der x als zweitletzten Knoten verwendet und kürzer als der momentan kürzeste bekannte a, y-Weg ist. Man überprüft, ob man mit Hilfe des bekannten a, x-Weges einen kürzeren a, y-Weg finden kann.
5	Ist dieser Wert kleiner, als die für ihn gespeicherte Distanz $\text{dist}(x)$, so ändere sie und setze den Knoten x als Vorgänger $\text{pre}(y)$.	Wenn es einen kürzeren Weg gibt, so wollen wir diesen auch verwenden.
6	Solange $z \notin S$ ist, gehe zu Anweisung 2.	Erst wenn der Zielknoten z in S ist, wissen wir, dass wir einen kürzesten a, z-Weg gefunden haben.

Lösung eines Problems. Die Idee des Dijkstra-Algorithmus besteht darin, sich einen bekannten kürzesten Weg anhand der Vorgänger $\text{pre}(x)$ zu merken und von ihm aus weitere kürzeste Wege zu finden, bis der Zielknoten erreicht ist.

Der Algorithmus anhand eines Beispiels



Hier ist das Verkehrsnetz zwischen Adelsheim und München in einem Graphen dargestellt. Anhand dieses Graphen haben wir einen kürzesten Weg zwischen Adelsheim und München gefunden.

Wir nehmen Adelsheim als Startknoten, da wir dort unsere Reise beginnen. Die Distanz $\text{dist}(AD)$ setzen wir auf 0 und $\text{pre}(AD) = AD$. In Anweisung 2 suchen wir den Knoten, der noch nicht in S ist und die kürzeste Distanz zu unserem Startknoten hat. Diese Eigenschaft erfüllt Osterburken mit $\text{dist}(O) = 5$. Also schließen wir in Anweisung 3 den Knoten O in die Menge S und die Kante AD, O in F ein. Da wir keinen kürzeren Weg nach Osterburken finden, und unser Zielknoten München noch nicht in S ist, springen wir zu Anweisung 2.

Wir suchen einen Knoten $v \notin S$ mit kürzester Distanz zu unserem Startknoten AD. Dieser ist Heilbronn und wird in der folgenden Anweisung in die Menge S eingeschlossen. Wir finden keinen kürzeren Weg von AD nach H. Der Zielknoten M ist noch nicht in S, also beginnen wir wieder mit Anweisung 2 und wiederholen das bis $M \in S$. Nun haben wir München in die Menge S eingebunden und als $\text{pre}(M) = N$ gespeichert. Also haben wir durch den Algorithmus einen kürzesten AD, M-Weg gefunden:

Menge S	Neuer Knoten y in Schritt 3	Distanz-Wert										
		HD	AD	O	WÜ	N	H	KA	S	UL	A	M
$\{\mathrm{AD}\}$	O	76	$\in S$	5	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
$\{\mathrm{AD}, \mathrm{O}\}$	H	76	$\in S$	$\in S$	72	∞	54	∞	∞	∞	∞	∞
$\{\mathrm{AD}, \mathrm{O}, \mathrm{H}\}$	WÜ	76	$\in S$	$\in S$	72	∞	$\in S$	∞	107	204	∞	∞
$\{\mathrm{AD}, \mathrm{O}, \mathrm{H}, \mathrm{WÜ}\}$	HD	76	$\in S$	$\in S$	$\in S$	191	$\in S$	∞	107	204	∞	∞
$\{\mathrm{AD}, \mathrm{O}, \mathrm{H}, \mathrm{WÜ}$ $\mathrm{HD}\}$	S	$\in S$	$\in S$	$\in S$	$\in S$	191	$\in S$	130	107	204	∞	∞
$\{\mathrm{AD}, \mathrm{O}, \mathrm{H}, \mathrm{WÜ}, \mathrm{HD}, \mathrm{S}\}$	KA	$\in S$	$\in S$	$\in S$	$\in S$	191	$\in S$	130	$\in S$	200	∞	∞
$\{\mathrm{AD}, \mathrm{O}, \mathrm{H}, \mathrm{WÜ}, \mathrm{HD}, \mathrm{S}, \mathrm{KA}\}$	N	$\in S$	$\in S$	$\in S$	$\in S$	191	$\in S$	$\in S$	$\in S$	200	∞	∞
$\{\mathrm{AD}, \mathrm{O}, \mathrm{H}, \mathrm{WÜ}, \mathrm{HD}, \mathrm{S}, \mathrm{KA}, \mathrm{N}\}$	UL	$\in S$	$\in S$	$\in S$	$\in S$	$\in S$	$\in S$	$\in S$	$\in S$	200	∞	357
$\{\mathrm{AD}, \mathrm{O}, \mathrm{H}, \mathrm{WÜ}, \mathrm{HD}, \mathrm{S}, \mathrm{KA}, \mathrm{N}, \mathrm{UL}\}$	A	$\in S$	$\in S$	$\in S$	$\in S$	$\in S$	$\in S$	$\in S$	$\in S$	$\in S$	285	357
$\{\mathrm{AD}, \mathrm{O}, \mathrm{H}, \mathrm{WÜ}, \mathrm{HD}, \mathrm{S}, \mathrm{KA}, \mathrm{N}, \mathrm{UL}, \mathrm{A}\}$	M	$\in S$	$\in S$	$\in S$	$\in S$	$\in S$	$\in S$	$\in S$	$\in S$	$\in S$	$\in S$	357

Dijkstra Algorithmus anhand eines Beispiels

Er verläuft von Adelsheim über Osterburken, Würzburg und Nürnberg nach München. Seine Gesamtlänge beträgt 357 Kilometer.

Vier-Würfel-Problem

Daniel Haller, Paul Ockenfuss

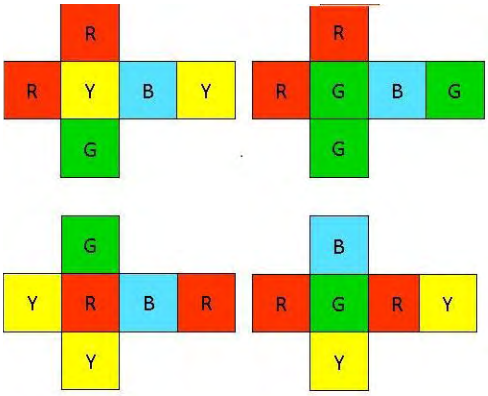
In fast jeder Kurspause gab es einige Teilnehmer, die die Zeit damit verbrachten, farbige Würfel zu einem Turm aufzubauen. Genauer gesagt versuchten sie, das sogenannte Vier-Würfel-Problem zu lösen. Es geht darum, vier Würfel aufeinanderzustapeln. Jeder Würfel hat sechs Seiten, von der jede mit einer von vier Farben beklebt ist. Der Turm soll so aufgebaut werden, dass an jeder Turmseite jede Farbe genau einmal vorkommt. Das hört sich leicht an, ist aber nicht so einfach, wie man denkt.

Es gibt sehr viele Möglichkeiten die vier Würfel zu einem Turm zu stapeln. Jeweils eine der 6 Flächen eines Würfels liegt oben. Dabei gibt es wieder jeweils 4 Positionen beim Drehen um die vertikale Achse des Würfels, also $6 \cdot 4$

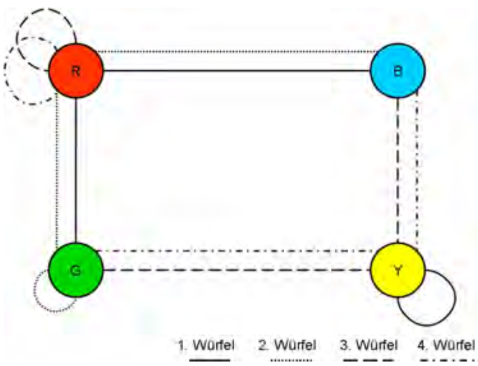
Möglichkeiten einen Würfel hinzustellen. Es gibt 4 Würfel, also insgesamt $(6 \cdot 4)^4$ mögliche Kombinationen. Da es aber egal ist, von welcher Seite wir den Turm betrachten, teilen wir das Produkt noch durch 4. Zusammen ergibt das

$$\frac{1}{4}(6 \cdot 4)^4 = 82944$$

Möglichkeiten einen Turm zu bauen.
In unserem Kurs haben wir einen Weg zur Lösung des Problems mit Hilfe von Graphen kennengelernt, den wir anhand des folgenden Beispiels zeigen. Die Würfel könnten zum Beispiel folgende Netze besitzen:



In dem folgenden Graphen repräsentiert jeder Knoten eine der vier Farben. Zwei Knoten sind benachbart, wenn sich die entsprechenden Farben am Würfel gegenüberliegen. Wenn sich zwei gleichfarbige Seiten gegenüber liegen, entsteht eine Schlinge.
Das Gleiche wiederholen wir für alle Würfel. Dabei geben wir jeder Kante einen Vermerk, zu welchem Würfel sie gehört. Aus den Netzen der obigen Würfel erhält man folgenden Graphen.

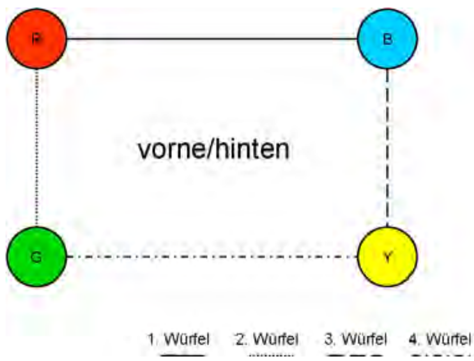


Im nächsten Schritt suchen wir zwei Subgraphen H_1 und H_2 in diesem Graphen. Sie sollen

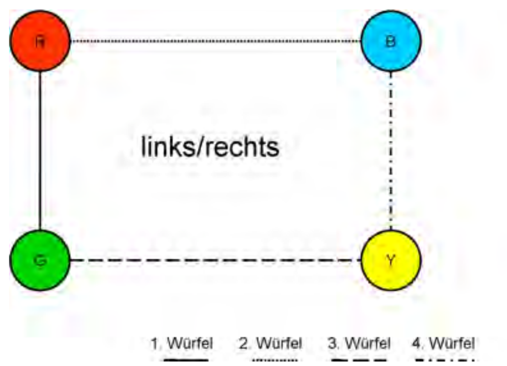
die auf der Vorder- und Rückseite bzw. die auf der linken und rechten Seite liegenden Farbpaare darstellen. In H_1 und H_2 muss jedes der folgenden drei Kriterien gelten:

- Jeder Knoten hat Grad 2. Jede Farbe kommt auf jeder Seite genau einmal vor. Ein Subgraph fasst immer zwei Seiten zusammen. Deshalb kommt in jedem Subgraph jede Farbe zweimal vor. Also hat der zu dieser Farbe gehörige Knoten Grad 2.
- Von jedem Würfel muss genau eine Kante benutzt werden. Dies ist die Voraussetzung, dass jeder Würfel eine Vorder- und Rückseite und eine linke/rechte Seite besitzt, die man im Turm sieht.
- Eine Kante in H_1 darf nicht in H_2 vorkommen und umgekehrt. Ein Farbpaar kann nicht gleichzeitig vorne und hinten sowie rechts und links liegen.

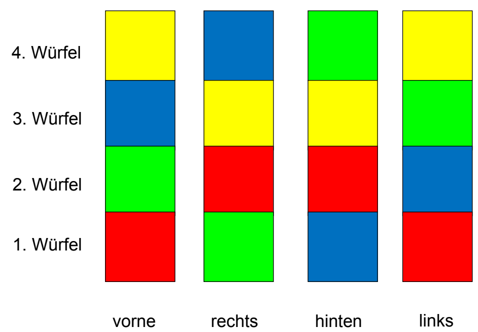
In unserem Beispiel erfüllen die folgenden Subgraphen die Kriterien.



Sind zwei Knoten durch eine Kante verbunden, dann befinden sich die Farben auf gegenüberliegenden Seiten des Würfels. Wir suchen uns



die Kanten des ersten Würfels im zweiten Subgraphen. Der erste Würfel ist auf der linken Seite rot und auf der rechten Seite grün, oder umgekehrt. So wiederholt man das für jeden Würfel in beiden Subgraphen. Am Ende sieht der Turm so aus:



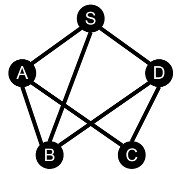
Hamiltonkreise

Hannes Botzet, Bastian Boll

Was ist ein Hamiltonkreis?

Ein Hamiltonkreis in einem Graphen ist ein Kreis, der jeden Knoten genau einmal enthält. Wir starten bei einem Knoten und versuchen jeden Knoten genau einmal zu besuchen, wobei wir nur entlang von Kanten laufen. Ein Graph, der einen Hamiltonkreis enthält, heißt hamiltonsch.

Im folgenden Beispiel wollen wir von unserem Startknoten S unsere vier besten Freunde, A, B, C, D, besuchen und am Ende wieder bei uns zu Hause ankommen. Wie man sieht, sind nicht alle Knoten benachbart. Daher muss es nicht unbedingt einen Hamiltonkreis geben.

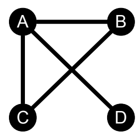


Dieser Graph ist hamiltonsch, denn

$$S \to B \to A \to C \to D \to S$$

ist ein Hamiltonkreis.

Folgender Graph hat keinen Hamiltonkreis:



In diesem Graphen ist der Knoten D nur mit einem anderen Knoten benachbart. Würden wir ihn besuchen, so kämen wir nicht mehr weiter, da die einzige abgehende Kante zum schon besuchten Knoten A gehen würde.

Wann kann ein Hamiltonkreis gefunden werden?

Damit wir einen Hamiltonkreis in einem Graphen finden können, muss der Graph G zusammenhängend sein, da von jedem Knoten ein Pfad zu jedem anderen Knoten vorhanden sein muss. Außerdem darf es keinen Knoten mit Grad kleiner als 2 geben, da dieser dann entweder nicht besucht oder nicht mehr verlassen werden kann. Sind diese Kriterien erfüllt, muss das aber noch lange nicht heißen, dass es einen Hamiltonkreis im Graphen gibt.
Im Kurs haben wir zwei Sätze bewiesen, die hinreichende Kriterien aufzeigen, wann in einem Graphen ein Hamiltonkreis zu finden ist.

Satz (Dirac)**:**
Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $|V| = n \geq 3$. Wenn für jeden Knoten x gilt, dass $\deg(x) \geq \frac{n}{2}$, dann hat G einen Hamiltonkreis.

Satz (Ore)**:**
Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $|V| \geq 3$. Wenn für alle Paare von Knoten x, y mit $xy \notin E$ gilt, dass $\deg(x) + \deg(y) \geq |V|$, dann hat G einen Hamiltonkreis.

Traveling Salesman Problem

Bastian Boll, Hannes Botzet

In unserem Kurs haben wir uns die Frage gestellt, wie man die kürzeste Rundreise unter allen Teilnehmern des Kurses finden kann. Es handelt sich hierbei um das sogenannte Problem des Handlungsreisenden (englisch: Traveling Salesman Problem).
Modellieren wir die gegebene Problemstellung mit Hilfe von Graphen, entspricht die kürzeste Rundreise einem kürzesten Hamiltonkreis in einem vollständigen und gewichteten Graphen. Dabei stehen Kantengewichte für die Luftlinienentfernung in Kilometern zwischen den Teilnehmern, welche als Knoten dargestellt werden.

Am einfachsten gelangt man zu einer optimalen Lösung, indem man im betrachteten Graphen die Länge aller enthaltenen Hamiltonkreise berechnet und einen kürzesten auswählt. Im Kurs haben wir uns überlegt, wie viele Hamiltonkreise in einem vollständigen Graphen auf n Knoten möglich sind. Zu diesem Zweck wählen wir zunächst einen beliebigen Startknoten. Von diesem Knoten führen $n-1$ Kanten zu einem Knoten, der noch nicht im Hamiltonkreis enthalten ist. Von diesen wird nun ein beliebiger gewählt und zu unserem Hamiltonkreis hinzugefügt. Von diesem Knoten aus führen nun $n-2$ Kanten zu Knoten, die noch nicht im Hamiltonkreis enthalten sind. Dieser Vorgang wird fortgeführt und die jeweiligen Anzahlen möglicher Kantenwahlen multipliziert. Schlussendlich muss das Produkt dieser Werte noch halbiert werden, da bei unserem Verfahren jeder Hamiltonkreis des Graphen zweimal durchlaufen wurde, einmal von vorn, einmal von hinten. Bezeichnet man die Knotenanzahl mit n, ergibt sich:

$$\begin{aligned}&\text{Anzahl der Hamiltonkreise}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\prod_{k=1}^{n-1}(n-k)\\ &= \frac{(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\ldots\cdot(2-1)}{2}\\ &= \frac{(n-1)!}{2}\end{aligned}$$

Unglücklicherweise steigt dieser Wert mit größer werdenden n exponentiell. Um dies zu veranschaulichen, haben wir die untenstehende Tabelle erstellt:

Knotenanzahl	Anzahl der Hamiltonkreise	Berechnungsdauer (1 Million Kreise pro Sekunde)
5	12	$0,000012$ Sekunden
14	3113510400	51 Minuten
28	$5,4\cdot 10^{27}$	$1,73\cdot 10^{14}$ Jahre

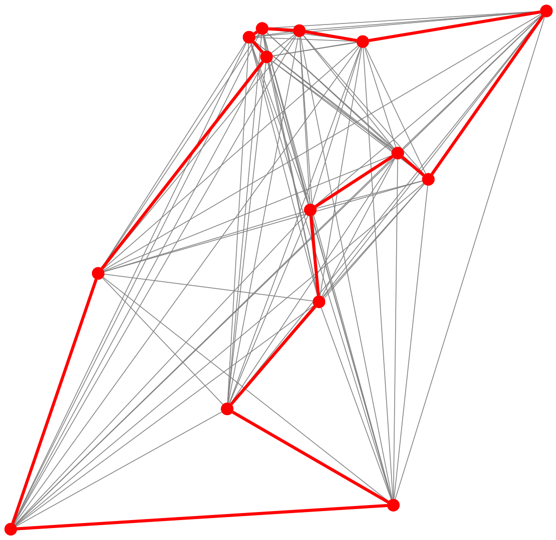
Es wird also schnell ersichtlich, dass diese Möglichkeit der Berechnung selbst mit Computereinsatz zu zeitaufwändig ist.

Nächste-Nachbar-Heuristik

Einen anderen Weg, auf ein Ergebnis zu kommen, bietet die sogenannte Nächste-Nachbar-Heuristik. Eine Heuristik ist ein Verfahren, das zwar abhängig von unterschiedlichen Faktoren meist ein gutes Ergebnis liefert, jedoch nicht unbedingt eine optimale Lösung liefert.
Bei der Nächsten-Nachbar-Heuristik wird zunächst ein beliebiger Knoten als Startknoten gewählt. Im nächsten Schritt wird eine leichteste Kante gesucht, die von diesem Startknoten ausgeht. Der Knoten, der durch diese Kante verbunden ist, wird nun zum nächsten Knoten des Hamiltonkreises. Nun wird von diesem Knoten aus eine leichteste Kante gesucht, die nicht zu einem bereits besuchten Knoten zurück führt. Diese Kante läuft man entlang und besucht ihren Endknoten. Führt man diesen Prozess weiter fort, gelangt man am letzten Knoten an und wählt dann unabhängig von deren Gewicht, die Kante, die diesen Knoten mit dem Anfangsknoten verbindet.
Um abschätzen zu können, wie gut das Resultat der Nächsten-Nachbar-Heuristik ist, verwendet man eine Fehlerabschätzung. Die kürzeste Rundreise in einem beliebigen Graphen auf n Knoten kann nicht kürzer sein als die Summe der n kürzesten Kanten. Bezeichnet man diese Summe mit b und die Länge des Hamiltonkreises, den die Nächste-Nachbar-Heuristik liefert mit l, so ergibt sich eine relative Fehlerabschätzung, die sich folgendermaßen errechnet:

$$\text{relativer Fehler } = \frac{l-b}{b}.$$

Dieser Wert ist abhängig von der Beschaffenheit des betrachteten Graphen sowie dem verwendeten Startknoten. Startet man eine Nächste-Nachbar-Heuristik in einem vollständigen Graphen, der die Wohnorte der Teilnehmer unseres Kurses modelliert, am Wohnort von Hannes Botzet, erhält man sogar eine optimale Rundreise.



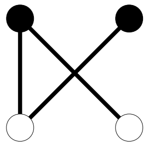
Die kürzeste Rundreise zwischen den Teilnehmern des Graphentheoriekurses hat eine Länge von 760 Kilometern.

Bipartite Graphen

FLORIAN PETERS, HANNES BOTZET

Was ist ein bipartiter Graph?

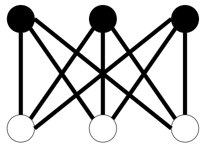
Ein Graph heißt bipartit, wenn man seine Knoten in zwei Mengen aufteilen kann, sodass keine Kante innerhalb einer dieser Mengen verläuft. Im folgenden Beispiel sind die einen Knoten weiß, die anderen schwarz markiert. Ein schwarzer Knoten ist nur mit weißen Knoten benachbart und umgekehrt.



Ein bipartiter Graph.

Vollständig bipartite Graphen

Man bezeichnet einen Graphen als vollständig bipartit, wenn jeder Knoten der einen Menge mit jedem Knoten der anderen Menge benachbart ist und umgekehrt. Markiert man die Knoten in schwarz und weiß, heißt das, dass jeder schwarze Knoten mit jedem weißen Knoten und jeder weiße Knoten mit jedem schwarzen Knoten benachbart ist.

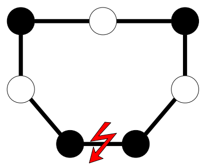


Vollständig bipartiter Graph $K_{3,3}$.

Wann ist ein Kreis bipartit?

Lemma:
C_n ist genau dann bipartit, wenn n gerade ist.

Wenn C_n bipartit ist, dann können die Knoten des Kreises abwechselnd schwarz und weiß gefärbt werden, sodass jede Kante einen weißen mit einem schwarzen Knoten verbindet. Also gibt es gleich viele weiße wie schwarze Knoten. Deshalb ist die Gesamtzahl der Knoten gerade.

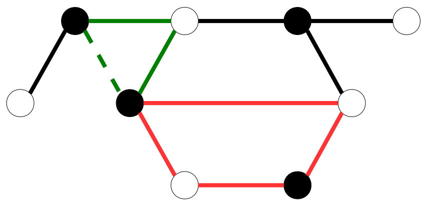


Ein nicht bipartiter Kreis mit ungerader Knotenanzahl.

Für die Rückrichtung sei die Gesamtanzahl der Knoten gerade. Man läuft den Kreis ab und färbt die Knoten abwechselnd schwarz und weiß. Da es gleich viele schwarze wie weiße Knoten gibt, hat der letzte Knoten eine andere Farbe als der erste Knoten. Eine Kante verbindet dann immer einen weißen mit einem schwarzen Knoten. Also ist C_n bipartit.

Satz (König)**:**
Ein Graph G ist genau dann bipartit, wenn er keinen Kreis ungerader Länge enthält.

Beispiel:



Der rote Kreis hat Länge 4, also gerade Länge. Wenn man die gestrichelte Kante einfügt, ist dieser Graph nicht mehr bipartit, weil dann zwei schwarze Knoten benachbart sind. Außerdem entsteht auch ein Kreis ungerader Länge, welcher grün markiert ist.

Beweis:

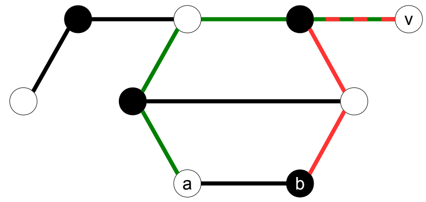
1. Richtung „⇒“:

Sei G ein bipartiter Graph. Dann müssen auch alle Subgraphen von G bipartit sein, sonst ist G nicht bipartit. Wenn ein Kreis der Länge i Subgraph von G ist, dann – so besagt es das vorherige Lemma – ist i gerade. Also enthält G keinen Kreis ungerader Länge.
Damit ist die erste Richtung bewiesen. Aber da man bei einem Äquivalenzbeweis immer beide Richtungen beweisen muss, fehlt die zweite Richtung noch.

2. Richtung „⇐“:

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph, der keinen Kreis ungerader Länge enthält. Falls er nicht zusammenhängend ist, wird jede Zusammenhangskomponente einzeln betrachtet. Man nimmt einen beliebigen Knoten v und teilt die restlichen Knoten in zwei Mengen V_g (weiße Knoten) und V_u (schwarze Knoten). Ein Knoten kommt in die Menge V_g, falls ein kürzester Pfad von v zu dem entsprechenden Knoten gerade Länge hat. Ein Knoten wird in die Menge V_u hinzugefügt, wenn ein kürzester Pfad von v zu diesem Knoten ungerade Länge hat. Der Knoten v hat zu sich selbst Abstand null, also ist $v \in V_g$.

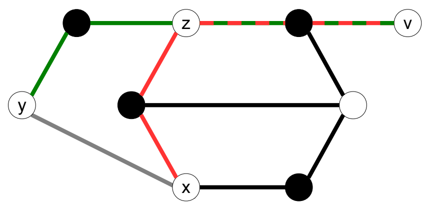
Beispiel:



Der kürzeste Pfad von v zu b (rot) hat ungerade Länge. Also ist der Knoten b in der Menge V_u. Der Pfad von v zu a (grün) hat gerade Länge, also enthält V_g den Knoten a.

Um zu zeigen, dass G bipartit ist, muss noch gezeigt werden, dass es keine Kante gibt, die zwei Knoten aus derselben Menge verbindet. Angenommen es existiert eine Kante xy, die zwei gleichfarbige Knoten x und y miteinander verbindet. Dann sind x und y beide in V_g oder beide in V_u, das heißt ein kürzester x, v-Pfad P_1 und ein kürzester y, v-Pfad P_2 haben beide gerade Länge oder beide ungerade Länge.

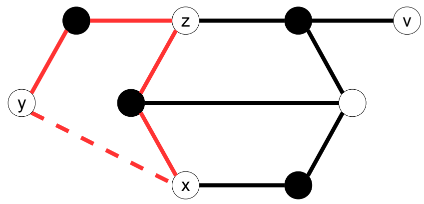
Beispiel:



Die Länge von P_1 (rot) beträgt 4, die Länge von P_2 (grün) beträgt auch 4, also sind beide Längen gerade.

Sei z der erste Knoten, der auf P_1 und P_2 liegt. Das Pfadstück von z nach v ist in P_1 gleich lang wie in P_2, sonst gäbe es einen kürzeren Pfad von x bzw. y nach v.

P_1 und P_2 haben beide gerade oder beide ungerade Länge und der Teilpfad von z nach v hat in beiden Pfaden die gleiche Länge. Deshalb haben auch der kürzeste y,z-Pfad und der kürzeste x,z-Pfad entweder beide gerade oder beide ungerade Länge. Der x,y-Pfad, der aus dem kürzesten y,z- und dem kürzesten x,z-Pfad besteht, hat gerade Länge. Zusammen mit der Kante xy ergibt sich so ein Kreis mit ungerader Länge. Dies ist ein Widerspruch, weil G keinen Kreis ungerader Länge enthält. Die Kante xy, die zwei gleichfarbige Knoten miteinander verbindet, kann es also nicht geben. Deshalb ist G bipartit.



Zusammen mit der gestrichelten Kante xy entsteht ein Kreis ungerader Länge.

Matchings

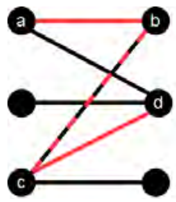
Daniel Haller

In einem Tanzkurs gibt es fünf Mädchen und fünf Jungen. Sie kennen sich untereinander nur teilweise. Wir wollen Tanzpaare bilden, die sich kennen. Solch eine Menge von Paaren kann man mit Hilfe eines Graphen als Matching beschreiben. Jeder Teilnehmer wird als Knoten dargestellt. Wenn sich ein Junge und ein Mädchen kennen, werden sie durch eine Kante verbunden.

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine Teilmenge M der Kanten, also $M \subset E$, heißt Matching, wenn für alle $e \neq e' \in M$ gilt, dass $e \cap e' = \{\}$ ist. Eine Kante wird nun als Menge ihrer Endknoten interpretiert. Wenn man $G = (V, M)$, also den Graphen auf allen Knoten V mit M als Kantenmenge, betrachtet, dann darf jeder Knoten höchstens Grad 1 haben.

Beispiel:

Sei $M = \{ab, cd\}$. Wenn man die Kanten ab und cd als Mengen $\{a, b\}$ und $\{c, d\}$ interpre-

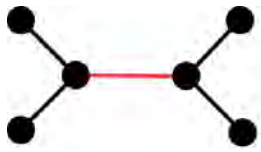


tiert, dann ist $ab \cap cd = \{\}$.

Wir nehmen nun die Kante bc in das Matching M auf. Es gilt $ab \cap bc = \{b\}$. Also ist $\{ab, cd\}$ ein Matching, aber $\{ab,\ cd,\ bc\}$ ist kein Matching.

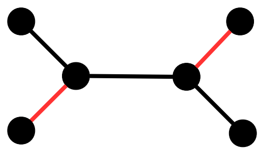
Ein Knoten v heißt von einem Matching M überdeckt, falls das Matching eine Kante e enthält, die den Knoten v mit einem anderen Knoten verbindet.

Ein Matching M heißt maximal, wenn man keine Kante e mehr hinzufügen kann. Fügt man dennoch eine Kante e zu M hinzu, dann ist $M \cup \{e\}$ kein Matching mehr.



Betrachten wir nochmal das Beispiel mit dem Tanzkurs. Wenn die ausgewählten Paare einem maximalen Matching entsprechen, dann können unter den übrigen Teilnehmern keine Paare mehr gebildet werden.

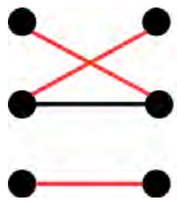
Wenn M ein größtes Matching ist, dann gibt es kein Matching, das mehr Kanten enthält. Auch wenn die Kanten anders gewählt werden, kann man kein größeres Matching finden.



Bei unserem Tanzkursbeispiel bedeutet das, dass es nicht mehr Paare gibt, auch wenn man die Paare anders zusammenstellt.

Ein Matching ist perfekt,wenn jeder Knoten von einer Matchingkante überdeckt ist. Das heißt, dass jeder Knoten einen Matchingpartner hat.

Wenn man das auf unser Tanzkursbeispiel be-



zieht, bedeutet das, dass jeder einen Tanzpartner hat.

Jedes perfekte Matching ist auch ein größtes Matching. Und jedes größte Matching ist ein maximales.

Ein Pfad P in G heißt augmentierend, wenn er abwechselnd Kanten in M und Kanten, die nicht in M enthalten sind, benutzt, und weder Anfangs- noch Endknoten von M überdeckt sind. Mit augmentierenden Pfaden kann man größere Matchings finden.

Ein augmentierender Pfad: Der Anfangs- und der Endknoten sind nicht von M überdeckt.

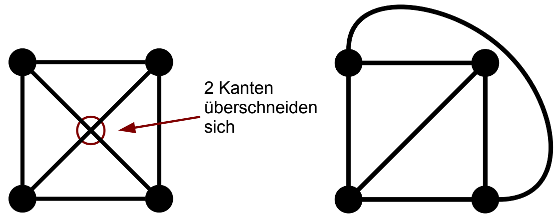
Planare Graphen

Florian Peters

Drei Bauern brauchen von drei Quellen Wasser, um ihr Feld ausreichend gut zu düngen. Die drei Bauern mögen sich nicht und wollen sich deshalb unter keinen Umständen über den Weg laufen. Ist es möglich, dass jeder Bauer einen Weg zu jeder Quelle bauen kann, sodass kein Weg einen anderen kreuzt? Diese Fragestellung haben wir in unserem Kurs mit planaren Graphen untersucht.

Ein Graph heißt planar, wenn er sich so in die Ebene zeichnen lässt, dass sich keine Kanten überschneiden. Wenn ein Graph so gezeichnet ist, dass sich keine Kanten überschneiden, heißt diese Zeichnung eben.

Beispiel:

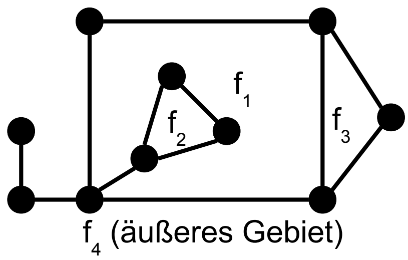


Links: nicht ebene Zeichnung.
Rechts: gleicher Graph eben gezeichnet.

Der Graph K_4 ist planar, da eine ebene Zeichnung existiert.

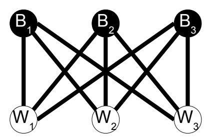
Eine ebene Zeichnung eines Graphen unterteilt die Ebene in Gebiete. Man schreibt $G = (V, E, R)$, wobei V die Knotenmenge, E die Kantenmenge und R die Menge der Gebiete ist.

Beispiel:



Diese Zeichnung unterteilt die Ebene in 4 Gebiete. Nicht zu vergessen ist dabei das äußere, unendlich große Gebiet. Also ist $R = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$.

Zurück zu den drei Bauern. Der dazugehörige Graph sieht so aus:

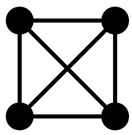


Das ist der $K_{3,3}$. Die schwarzen Knoten stellen die Bauern dar, die weißen Knoten die Quellen. Mit diesem Graphen kann man beweisen, dass die Bauern ihre Wege nicht so bauen können, dass sich keine Wege überschneiden.

Korollar:
Sei $G = (V, E)$ ein planarer Graph mit $n = |V| \geq 3$ Knoten. Sei weiter r die Länge eines kürzesten Kreises in G. Dann gilt

$$|E| \leq \frac{r}{r-2} \cdot (n-2).$$

Beispiel mit dem planaren Graph K_4:



Der K_4 hat 6 Kanten ($|E| = 6$), 4 Knoten ($|V| = n = 4$) und der kleinste Kreis im Graph hat Länge 3 ($r = 3$). Durch Einsetzen in die obige Formel erhält man:

$$\begin{aligned} |E| &\leq \frac{r}{r-2} \cdot (n-2) \\ 6 &\leq \frac{3}{3-2} \cdot (4-2) \\ 6 &\leq 6. \end{aligned}$$

Jetzt zeigen wir durch einen Widerspruchsbeweis, dass der $K_{3,3}$ nicht planar ist. Angenommen der $K_{3,3}$ wäre planar, dann können wir das obige Korollar anwenden:

$$\begin{aligned} |E| &\leq \frac{r}{r-2} \cdot (n-2) \\ 9 &\leq \frac{4}{4-2} \cdot (6-2) \\ 9 &\leq 2 \cdot 4 \\ 9 &\leq 8. \quad \text{Widerspruch!} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $K_{3,3}$ ist nicht planar.

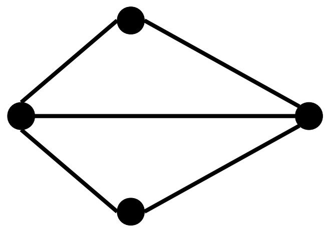
Ein weiterer wichtiger nicht planarer Graph ist der K_5. Dies haben wir im Kurs ähnlich bewiesen. Des Weiteren haben wir gelernt, dass jeder nicht planare Graph den $K_{3,3}$ oder den K_5 als Unterteilung enthält.

Die Eulerformel und der 5-Farbensatz

Hannah Schammann, Paul Ockenfuss

Die Eulerformel

Während unserer Beschäftigung mit planaren Graphen haben wir festgestellt, dass zwischen $|V|$, $|E|$, $|R|$ ein Zusammenhang besteht, nämlich $|V| - |E| + |R| = 2$. Dies gilt für alle planaren Graphen, einen Beweis dazu führte schon Euler vor 350 Jahren durch.



Für diesen Graphen gilt: $|V| = 4$, $|E| = 5$, $|R| = 3$,

$$4 - 5 + 3 = 2.$$

Satz:
Sei $G = (V, E, R)$ eine ebene Zeichnung eines zusammenhängenden Graphen. Dann gilt:

$$|V| - |E| + |R| = 2. \qquad (*)$$

Jetzt zeigen wir den Satz mit Induktion über $m = |E|$.

Induktionsanfang: $m = 0$.
Ein zusammenhängender Graph ohne Kanten hat genau einen Knoten und genau ein Gebiet, nämlich das äußere Gebiet. Also ist $|V| = 1$, $|E| = 0$ und $|R| = 1$. Wenn man das in die Formel $(*)$ einsetzt, erhält man

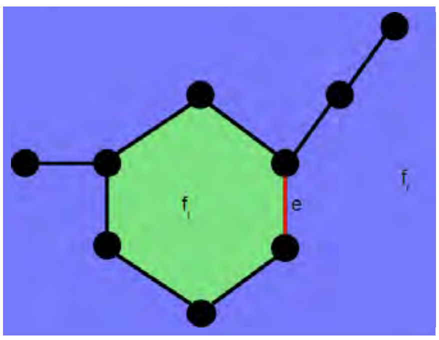
$$1 - 0 + 1 = 2.$$

Induktionshypothese: $m = k$
Sei $G = (V, E, R)$ eine ebene Zeichnung eines zusammenhängenden Graphen mit $|V| = n$, $|E| = k$ und $|R| = f$. Dann gilt $n - k + f = 2$.

Induktionsschritt: $m' = k + 1$.
Sei $G' = (V', E', R')$ eine ebene Zeichnung eines zusammenhängenden Graphen und $n' = |V'|$, $m' = k + 1 = |E'|$, $f' = |R'|$.
Zu zeigen ist: $n' - m' + f' = 2$. Wir unterscheiden zwei Fälle für G'.

Fall 1:
G' enthält keinen Kreis. Dann ist G' kreisfrei und zusammenhängend, also ein Baum. Zeichnungen von Bäumen haben nur das äußere Gebiet. Es gilt $m' = n' - 1$.
$\Rightarrow n' - (n' - 1) + 1 = 2$.

Fall 2:
G' enthält einen Kreis. Sei e eine Kante auf einem Kreis in G' und $G = (V, E, R)$ die Zeichnung, die entsteht, wenn man e aus dem Graphen $G' = (V', E', R')$ entfernt. Dann verschmelzen die Gebiete f_l und f_r, die vorher durch e getrennt waren, zu einem Gebiet f_{lr}.



Sei $n = |V|$, $m = |E|$, $f = |R|$.

- $R = (R' \setminus \{f_l, f_r\}) \cup \{f_{lr}\}$, $f = f' - 1$. Beim Entfernen von e sind die Gebiete f_l und f_r verschmolzen.
- $V = V' \Rightarrow n = n'$
  Die Knotenanzahl bleibt gleich.
- $E = E' \setminus \{e\} \Rightarrow m = m' - 1$
  Die Kantenanzahl sinkt um eins, da e entfernt wurde.

Also gilt:

$$n' - m' + f' = n - (m+1) + (f+1) = n - m + f.$$

Für $G = (V, E, R)$ gilt nach der Hypothese $n - m + f = 2$, also ist

$$n' - m' + f' = 2.$$

□

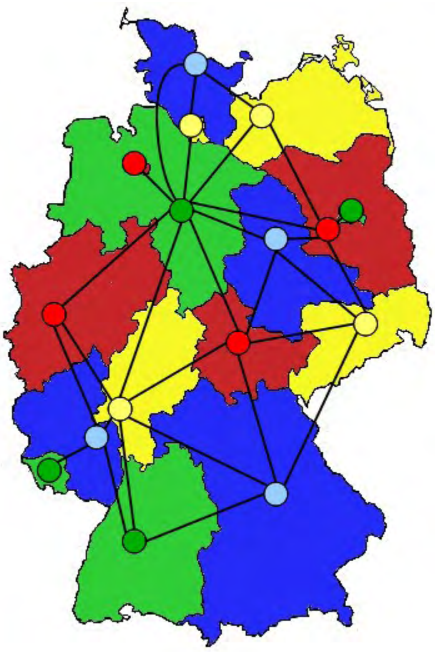
Aus der Eulerformel kann man verschiedene Eigenschaften für planare Graphen folgern, zum Beispiel besitzt jeder planare Graph einen Knoten x mit $\deg(x) \leq 5$.

Landkartenfärbung

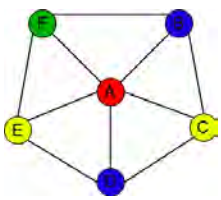
Der Mathematiker Francis Guthrie beschäftigte sich 200 Jahre nach Euler, 1852, zum ersten Mal mit dem Problem der Landkartenfärbung. Er wollte die britischen Grafschaften mit einer möglichst geringen Anzahl von Farben so einfärben, dass benachbarte Grafschaften unterschiedliche Farben haben.
Im Kurs haben wir eine Deutschlandkarte so eingefärbt, dass benachbarte Bundesländer unterschiedliche Farben haben. Dafür probierten wir zuerst aus, mit wie vielen Farben man die Deutschlandkarte mindestens einfärben muss.

Um das Problem graphentheoretisch zu betrachten, zeichneten wir einen planaren Graphen, bei dem jeder Knoten einem Bundesland entspricht. Wenn die Bundesländer benachbart sind, werden die dazu gehörigen Knoten mit einer Kante verbunden. Bundesländer, die mit einer Kante verbunden sind, dürfen nicht dieselbe Farbe besitzen. Für $k \in \mathbb{N}$ nennt man den Graphen G k-färbbar, wenn es eine Abbildung f gibt, die jedem Knoten v eine Farbnummer zuordnet, sodass für alle Knoten $x, y \in V$ mit $xy \in E$ gilt: $f(x) \neq f(y)$. Das heißt, ein Graph ist 4-färbbar, wenn seine Knoten mit 4 Farben so eingefärbt werden können, dass benachbarte Knoten verschiedene Farben haben.

Um zu zeigen, dass man mindestens vier Farben braucht, um eine Deutschlandkarte einzufärben, betrachten wir Thüringen und seine



Nachbar-Bundesländer. Wenn man diese Bundesländer nun nach den genannten Kriterien einfärben will, braucht man mindestens vier Farben. In rot färben wir den Knoten A ein, der in unserem Beispiel Thüringen entspricht. Daraus folgt, dass kein anderer Knoten die Farbe rot haben kann. Der Kreis $BCDEF$ ist nicht 2-färbbar, weil er eine ungerade Länge hat. Deshalb färben wir die Knoten B und D blau ein und die Knoten C und E gelb ein, weil sie nicht benachbart sind. Jetzt braucht man noch eine vierte Farbe, um den Knoten F zu färben, da F mit drei unterschiedlich gefärbten Knoten benachbart ist. Somit benötigt man mindestens 4 Farben.



Vier Farben reichen für jeden planaren Graphen aus. Allerdings ist der Beweis dafür nur mit einem Computer möglich.

Satz (5-Farben-Satz)**:**
Jeder planare Graph kann mit 5 *Farben gefärbt werden.*

Den Beweis führten wir durch Induktion über die Anzahl der Knoten $|V|$.

Induktionsanfang: $|V| = 1$
Für einen Knoten gilt der Satz, da man ihn mit höchstens fünf Farben einfärben kann.

Induktionshypothese: $|V| = k - 1$
Jeder planare Graph mit höchstens $k - 1$ Knoten ist 5-färbbar.

Für den Induktionsschluss benutzen wir die obige Folgerung, dass jeder planare Graph einen Knoten x mit $\deg(x) \leq 5$ hat.
Falls $\deg(x) \leq 4$, entfernen wir x aus G und färben den übrigen Graphen G' nach der Induktionshypothese mit 5 Farben. Fügen wir x wieder hinzu, so finden wir eine Farbe für x, da $\deg(x) \leq 4$.
Im Fall $\deg(x) = 5$ verschmelzen wir zwei Nachbarn von x, die mit v und u bezeichnet werden und selbst nicht benachbart sind, zu einem Knoten w^*. Nun entfernen wir x und wenden die Induktionshypothese an. Somit ist w^* eingefärbt. Wenn man x wieder hinzufügt, finden wir eine Farbe für x, da wir die gleiche Situation wie im Fall $\deg(x) \leq 4$ haben. Ziehen wir u und v wieder auseinander, haben wir den Graphen G in 5 Farben eingefärbt. $\square$